# Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège : une étude de cas.

Chedlia Ben Salah Breigeat

**UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT**

**Ecole doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »**

*Année 2000-2001*

***THÈSE***

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

**SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue publiquement
par

Chedlia BEN SALAH BREIGEAT
Le 21 Décembre 2001

**Titre :**

# Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas

**Directeur de thèse : Aline ROBERT**

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **Mme ROBINET Jacqueline** | Maître de conférence Université Paris 7 | Président |
| **M. COLOMB Jacques** | Professeur INRP Paris | Membre |
| **Mme LABORDE Colette** | Professeur IUFM de Grenoble | Rapporteur |
| **M. PARZYSZ Bernard** | Professeur IUFM d'Orléans-Tours | Rapporteur |
| **Mme ROBERT Aline** | Professeur IUFM de Versailles | Directeur de thèse |

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

**Ecole doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »**

*Année 2000-2001*

***THÈSE***

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

**SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue publiquement
par

Chedlia BEN SALAH BREIGEAT
Le 21 Décembre 2001

**Titre :**

# Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas

**Directeur de thèse : Aline ROBERT**

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **Mme ROBINET Jacqueline** | Maître de conférence Université Paris 7 | Président |
| **M. COLOMB Jacques** | Professeur INRP Paris | Membre |
| **Mme LABORDE Colette** | Professeur IUFM de Grenoble | Rapporteur |
| **M. PARZYSZ Bernard** | Professeur IUFM d'Orléans-Tours | Rapporteur |
| **Mme ROBERT Aline** | Professeur IUFM de Versailles | Directeur de thèse |

# REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier ici les personnes qui m'ont soutenue, aidée et encouragée dans ce long travail.

En premier lieu, je remercie Aline ROBERT d'avoir accepté de diriger la recherche. Je lui suis reconnaissante pour sa grande disponibilité malgré un emploi du temps toujours chargé, j'ai été sensible à la qualité de ses accompagnements, à la profondeur des discussions que nous avons pu tenir et à toutes les pistes de réflexions qu'elle m'a fait partager.

Je remercie Bernard PARZYSZ et tout particulièrement Colette LABORDE d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et pour m'avoir ainsi aidée à en avoir une vision plus globale et plus fine. Que Jacques COLOMB accepte également mes remerciements de s'être proposé comme éventuel rapporteur.

Je n'oublie pas les membres de l'équipe DIDIREM ni Annie, Martine, Nadine, Nicole, Romain et William de l'IREM dont la cordialité et l'efficacité sont remarquables.

J'adresse une pensée particulière à ceux qui m'ont apporté un soutien chaleureux et efficace, Anouk, Françoise, Gaëlle, Gilbert et Philippe !...
Enfin que tous ceux ami(e)s, collègues et proches en Tunisie trouvent ici une pensée spéciale.

# SOMMAIRE

## CHAPITRE I

## INTRODUCTION, PROBLEMATIQUE, METHODOLOGIE

## CHAPITRE II
## LES DISCOURS

## CHAPITRE III
## LES MANUELS

## CHAPITRE IV
## CONCLUSION

# CHAPITRE I

## Introduction, problématique, méthodologie

# *A- Introduction et problématique*

## 1- Introduction

Les résultats de la formation initiale en mathématiques des enseignants de mathématiques du collège nous questionnent, à ce titre nous avons choisi de faire porter notre recherche sur les nouveaux enseignants. Nous admettons que les enseignants participent de façon essentielle à l'un des rôles attribués à l'enseignement : favoriser chez l'apprenant la construction de connaissances suivant un processus à long terme, ni toujours continu ni toujours linéaire. Pour les mathématiques, l'objectif que nous associons à la construction de connaissances est de conduire l'apprenant à conceptualiser ce que, institutionnellement, nous nommons des savoirs[1].

L'enseignement est dispensé en classe par les enseignants et, même si leur travail ne se limite pas à la classe, ce lieu sera notre terrain d'observation. De plus, nous nous cantonnerons à l'enseignement des mathématiques assuré par des enseignants débutants en classe de collège.

Une facette liée à cet enseignement retient particulièrement notre attention, elle privilégie les acquis mathématiques des jeunes enseignants : nous nous intéressons aux manifestations des connaissances mathématiques des professeurs lorsque ceux-ci enseignent les mathématiques aux élèves[2].

---

[1] Dans notre travail, nous utiliserons très fréquemment le terme « connaissances » et plus rarement le terme « savoir ». Plusieurs didacticiens ont proposé des définitions associées à différents contextes conduisant d'ailleurs à proposer différents types de savoirs et à établir des distinctions entre connaissances et savoirs en précisant les liens entre ces notions. Nous ne développerons pas ici ce sujet mais nous retenons comme base significatives les éléments suivants :
A. Rouchier (1996) parle de « principe actif de l'action » pour désigner les connaissances : « Les prises de décision qui vont se manifester et s'effectuer dans le registre adapté aux circonstances déterminées par la situation et l'interaction qui lui est associée, dès lors qu'il y a régularité ou des formes de justification, seront qualifiées comme relevant d'un "principe actif de l'action" que nous appellerons connaissances » et plus loin (en conclusion) « Le passage au savoir est une forme de domestication de ce potentiel (d'action) et sa transformation en capacité c'est-à-dire en quelque chose qui puisse se montrer ».
F. Conne (1992) précise : « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir ».
Ces définitions sont en général données pour un sujet apprenant, nous y adhérons et utiliserons - en général - les deux termes dans ces sens définis, cependant notre rigueur pourra parfois être "souple".

[2] I. Bloch (1999) indique le questionnement suivant de F. Conne (1997) : « ...qu'est-ce qu'enseigner les mathématiques ? » question que F. Conne renvoie à une autre « portant celle-là sur ce qu'est une situation et une situation d'interaction entre un enseignant et un élève ». Il poursuit ainsi : « Je me trouve alors devant la nécessité de distinguer entre l'action le faire et la pratique. Pratiquer les mathématiques, dans quelque situation que ce soit implique une certaine activité cognitive ainsi que la production de certains gestes ou signes lisibles de l'extérieur, ce que j'appellerai un faire. Enseigner les mathématiques [...] suppose chez l'enseignant lui-même une certaine activité et des productions tangibles ». Ces manifestations nous intéressent particulièrement car elles ne sont pas les mêmes que celles des élèves, citons encore I. Bloch se référant à Brousseau puis à Rouchier (1991) : « ce que nous retiendrons (...) c'est la différence pointée (...) entre connaissances de l'élève et connaissances de l'enseignant, à un même moment (d'une) situation

Auparavant, afin de préciser notre interrogation et pour mieux comprendre ce que sont les «jeunes (ou nouveaux) enseignants de mathématiques », essayons d'en tracer un portrait. Nous apportons ici une restriction supplémentaire : nous n'observons que des enseignants (trois) ayant suivi des études (supérieures) en mathématiques, titulaires d'une licence de mathématiques et du CAPES.

Un passé d'étudiants précède la carrière professionnelle des nouveaux enseignants. Etant étudiants ils ont construit un certain rapport aux mathématiques, aux activités mathématiques et à leur apprentissage. Nous inspirant de B. Charlot (1997), nous dirons qu'ils ont élaboré un certain rapport au savoir[3]. Avec A. Robert (1996), nous pouvons préciser que du fait de leurs activités mathématiques, ils ont développé une certaine « fréquentation des mathématiques » dont une caractéristique importante est que les activités mathématiques qu'ils avaient (en tant qu'étudiants) leur étaient directement destinées. Ils faisaient des mathématiques pour eux, pour réussir, pour apprendre... De notre point de vue, à ce niveau de l'enseignement (enseignement supérieur) la motivation essentielle est guidée par un but (implicite évoqué ci-dessus) : l'appropriation des mathématiques sous forme de concepts. En effet, nous estimons qu'il s'agit précisément pour les étudiants d'arriver à une certaine conceptualisation des mathématiques qui sont plus approfondies, plus riches, plus organisées qu'auparavant. Cependant, si la conceptualisation est bien une étape nécessaire à son futur métier –étape supposée franchie par le futur enseignant– elle n'est peut-être pas suffisante à l'enseignant pour l'enseignement. Nous abordons là un point important :

La fréquentation des mathématiques en position d'enseignant ne peut plus être la même que celle qui prévalait en position d'étudiant. Citons A. Robert (1996) : « les préoccupations mathématiques des enseignants sur un sujet donné sont plus variées et plus vastes que celles des étudiants », « il y a à la fois une certaine réduction du champ mathématique abordé, qui se renouvelle peu, et une reconstruction d'un savoir unifié, cohérent, à partir des connaissances plus dispersées reçues pendant les années de formation universitaire ; et l'utilisation de ces

...» et ; « ...l'enseignant emploie, lui, des connaissances (<u>différentes de celles de l'enseigné</u>) pour contrôler que l'élève utilise bien les connaissances adéquates... » (c'est nous qui soulignons).

[3] B. Charlot (1997) définit « rapport au savoir » ainsi : « par rapport au savoir je désigne le rapport à « l'apprendre » quelle que soit la figure de l'apprenant - et non pas seulement le rapport à un objet-savoir ». Pour nous, le rapport à l'objet-savoir est évidemment fondamental.

connaissances mathématiques est différente, suite à la décentration des objectifs - les mathématiques ne sont plus objet d'acquisition mais de transmission ».

Sur la base des connaissances mathématiques acquises à l'université puis à partir de la formation qu'ils suivent en IUFM et ensuite avec leurs premières activités d'enseignants, les (ex-)étudiants commencent à modifier, à enrichir la fréquentation, le rapport qu'ils entretenaient avec les mathématiques.

Le résultat de ce changement de fréquentation, le nouveau rapport qui s'est forgé vont constituer l'une des caractéristiques de l'expertise enseignante. Ce changement de fréquentation peut poser problème, il peut se construire difficilement, il est (nous semble-t-il) d'ailleurs un des principaux enjeux de la formation en IUFM. Nous pouvons nous poser la question suivante : comment les enseignants utilisent-ils cette nouvelle fréquentation dans leur pratique ?

D'autre part, si nous écoutons les enseignants de mathématiques, plus précisément les nouveaux (les débutants), nous nous apercevons que partager les mathématiques avec les élèves est une des grandes difficultés, qu'ils évoquent eux-mêmes (A. Robert 1996). Ils doivent faire des mathématiques pour et avec leurs élèves et non plus seulement pour eux-mêmes. En fait, il s'agit pour eux de prendre en compte les élèves quand ils "font" des mathématiques en classe. Il s'agit de créer des situations et des conditions de fréquentation des mathématiques pour les élèves qui vont développer à leur tour un rapport aux savoirs mathématiques. Il faut arriver à créer des conditions pour que ce rapport soit adéquat (que "ça" se construise bien chez les élèves), tout en sachant que cette fréquentation et ce rapport ne seront pas exactement les mêmes pour tous les élèves ni identiques à ceux dont les enseignants, en tant qu'anciens étudiants, avaient l'habitude. On pourrait presque dire qu'il ne s'agit pas des "mêmes" mathématiques, sans aller jusque-là nous suggérons qu'il ne s'agit pas de la même fréquentation. Dans les faits, nous notons deux changements importants : la destination des mathématiques et la fréquentation des mathématiques.

Arrêtons-nous un instant sur la fréquentation "élève" pour essayer de mieux la saisir, nous lui avons attribué quelques caractéristiques : d'abord (comme nous l'avons déjà évoqué) l'apprentissage est un processus à long terme. Les élèves ne peuvent pas construire instantanément les concepts mathématiques, plus généralement les connaissances mathématiques, que les enseignants ont acquises au cours de la formation qui les a conduits de l'école primaire à l'université. Par conséquent, s'il ne s'agit pas d'arriver directement au même niveau de conceptualisation des savoirs mathématiques que celui supposé des étudiants, il s'agit certainement de constituer des bases sur lesquelles pourront se développer dans des cycles ultérieurs d'autres connaissances et peut-être à long terme d'arriver (pour certains) à cette conceptualisation des savoirs (savants) mathématiques. Ensuite, les connaissances que l'élève va construire ne lui sont pas présentées de la même manière qu'aux étudiants (définitions, propriétés, démonstrations, lemmes, théorèmes...), ni avec le même enchaînement (cours, exercices), ni au même niveau.

Par exemple un étudiant peut être appelé à voir une division euclidienne comme une congruence alors qu'on ne peut pas demander la même chose aux élèves.

Enfin, l'élève construit des connaissances pour lui mais aussi pour et à cause de l'enseignant, de ses parents, de son entourage. L'aspect sociologique de l'apprentissage n'est pas le même pour l'élève et pour l'étudiant, les mathématiques sont éventuellement secondaires, moins approfondies, plus locales. L'élève ne cherche pas toujours à tisser des liens entre les différents éléments qu'il côtoie au cours de son apprentissage.

Ce très rapide et schématique éclairage de la fréquentation "élève" des mathématiques nous autorise à formuler ce qui ressemble à une trivialité : il n'y a pas identité entre le "statut de l'apprenant étudiant" et celui de "l'apprenant élève"; sur un même sujet mathématique, les exigence ne sont pas les mêmes. L'hypothèse ainsi introduite, déduite de ce qui précède –que nous ne vérifierons pas– nous permet d'affirmer ce qui suit : l'enseignant ne peut pas voir les élèves comme un autre « lui-même » étudiant, les élèves ne sont pas de "petits étudiants". L'enseignant ne peut pas agir avec les élèves comme il agissait avec lui-même étant étudiant : ses derniers souvenirs d'apprenant ne lui sont pas très utiles pour faire partager les mathématiques avec les élèves.

Par ces détours, nous aboutissons à une ébauche du portrait de l'enseignant de mathématiques, de l'enseignant débutant :

- il est un ancien étudiant qui avait une certaine fréquentation des mathématiques,
- il modifie la fréquentation estudiantine qu'il avait développée,
- il s'occupe de faire acquérir des connaissances en mathématiques à des élèves qui ont une fréquentation des mathématiques à un autre niveau.

L'enseignant débutant est appelé à partager les mathématiques avec les élèves en ayant une fréquentation de la matière pas toujours semblable à celle des élèves, fréquentation qui est susceptible de lui poser problème.

Ainsi l'expertise enseignante ne se réduit pas à la seule connaissance de la matière. Cela nous interpelle d'une autre façon : les connaissances mathématiques des enseignants ne risquent-elles pas de se trouver "noyées" dans l'expertise enseignante ?

Les stricts contenus nous interpellent aussi : les connaissances mathématiques que l'enseignant possède, qu'il a construites en tant qu'étudiant, connaissances que les élèves commencent à construire, ne peuvent pas toujours être explicitées et parfois elles restent implicites.

Ainsi, les enseignants ne peuvent pas exposer directement toutes leurs connaissances mathématiques mais en même temps, ils doivent les utiliser. Nous relevons ici un autre élément de l'expertise enseignante, une autre facette que l'enseignant est appelé à appréhender : sa maîtrise peut en être difficile.

Nous voyons ici quelle peut être la difficulté pour un jeune enseignant de ne pas y "perdre" ses connaissances, notamment universitaires.

Pour la formation des enseignants, ce qui nous intéresse dans l'initialisation de l'expertise enseignante, c'est de diagnostiquer les connaissances mathématiques nécessaires et de contribuer à leur renforcement. Ou plutôt de contribuer à optimiser la présence et l'utilisation (surtout implicites) des connaissances mathématiques des enseignants pendant leurs cours en classe dans l'exercice de leur fonction.

Compte tenu de leur caractère en grande partie implicite, nous voulons d'abord voir les connaissances mathématiques des enseignants telles qu'elles sont appelées à se manifester en classe.

Pour cela, dans cette introduction nous allons nous intéresser aux connaissances mathématiques, aux enseignants et aux élèves (c'est-à-dire au système didactique) suivant deux éclairages : "institutionnel" et "enseignants". Dans la méthodologie, nous compléterons ces deux éclairages par la prise en compte d'un document, souvent utilisé dans l'enseignement mais dont le statut n'est pas précis : le manuel de mathématiques. L'éclairage institutionnel nous montrera que nous pouvons déduire des textes officiels des sous-entendus portant sur les savoirs et montrant que l'enseignant doit s'y référer : nous nous en doutons. Mais quels savoirs et comment s'y référer ? Le deuxième éclairage est une ébauche de réponse à cette question.

### *1.1- L'éclairage institutionnel*

Les objectifs, programmes et instructions[4] pour l'enseignement de mathématiques des classes de collège exposent sous forme de titres les connaissances mathématiques que les élèves doivent acquérir. Ces documents ne mentionnent pas de façon précise les connaissances mathématiques (certainement plus vastes mais adaptées) que les enseignants doivent posséder pour cela. Cependant, la présentation sous forme d'intitulés classés par notions peut donner des indications que l'on peut interpréter d'un point de vue universitaire. Ces indications peuvent permettre de déduire, au moins partiellement, les connaissances mathématiques nécessaires, liées à ce qui doit être exposé.

*Voyons de plus près les instructions aux enseignants.*

Pour les « orientations et objectifs des quatre classes » nous trouvons : « Il est nécessaire que les professeurs possèdent dès le départ une solide formation professionnelle qui nécessite la maîtrise des disciplines qu'ils enseignent... ». Retenons cet élément qui servira à notre analyse :
- la maîtrise des disciplines pour les enseignants.

Dans les « programmes et compléments » pour la classe de sixième[5], nous trouvons dans la partie *nature et objectifs* « l'enseignement mathématique comporte deux aspects ». Citons le second : « il apprend (...) à relier ces représentations [schémas, tableaux, figures] à une activité mathématique et à des concepts » puis dans la partie *instructions générales choix des méthodes* en ce qui concerne l'enseignant, nous trouvons « il lui faut (...) prendre la distance nécessaire par rapport à ses propres connaissances (...). Il [l'enseignant] sait identifier et prévoir les subtilités

---

[4] Brochure *Mathématiques classes des collèges* $6^e, 5^e, 4^e, 3^e$ horaires, objectifs, programmes, instructions réimpression 1996 (édition précédente 1994).
[5] idem

qu'il est préférable de taire, les démarches rigoureuses qui sont à remplacer par des arguments accessibles aux élèves... »

Nous retiendrons ici pour l'analyse :

- apprendre à relier les représentations à une activité mathématique et à des concepts,
- prendre la distance par rapport aux connaissances de l'enseignant,
- remplacer les démarches rigoureuses par des arguments accessibles aux élèves...

Les *orientations et objectifs* notent quant à eux « qu'il y a, pour une même question, des niveaux différents d'approfondissement... » que le travail personnel des élèves doit consister aussi « à approfondir des connaissances (...) comprendre que le savoir n'est jamais cloisonné ». Nous voyons apparaître ici une idée de structuration sur laquelle nous reviendrons. Les programmes et compléments de la classe de sixième précisent qu'il convient de faire fonctionner, à propos des nouvelles situations, les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés et qu'il convient de mettre en oeuvre des exercices de synthèse pour coordonner des acquisitions diverses.

Nous retiendrons ici :

- faire fonctionner les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés,
- mettre en oeuvre des exercices de synthèse pour coordonner des acquisitions diverses.

Pour toutes les classes du collège, les programmes précisent : « les connaissances acquises antérieurement sont mobilisées et utilisées le plus souvent possible ».

De ce que nous avons retenu et de cette dernière précision, nous pouvons déduire que les programmes officiels des classes des collèges sont conçus de sorte que chaque niveau d'enseignement permette chez les élèves :

- de renforcer des éléments de connaissances établis aux niveaux antérieurs,
- d'étendre le champ d'action des connaissances déjà en place,
- d'établir de nouvelles bases de connaissances susceptibles de conduire à des constructions ultérieures.

De plus, par la présentation des connaissances à acquérir sous forme de titres (qui font référence à des notions mathématiques précises non toujours explicitées) et par l'allusion au fait que l'enseignement doit conduire l'élève à relier les représentations à des activités mathématiques et à des concepts, nous déduisons que la référence aux savoirs mathématiques dans les programmes est une constante préoccupation pour l'enseignement et qu'il s'agit bien pour les élèves de tendre vers la constructions de concepts mathématiques.

*Voyons maintenant ce que nous pouvons conclure des textes officiels concernant les enseignants.*

Nous pouvons esquisser certains éléments constitutifs des connaissances mathématiques des enseignants nécessaires à leur enseignement.

La mention de la maîtrise de la discipline laisse sous-entendre qu'il ne s'agit pas que d'une connaissance sommaire de la matière (nous nous en doutons). Au-delà des titres qui apportent quelques précisions des points à connaître, nous avons vu que l'enseignant est appelé à faire construire aux élèves des relations entre les représentations, les activités mathématiques et les concepts. Disons naïvement qu'il ne peut pas directement expliciter les concepts et doit donc les garder pour un certain temps implicites. Ce caractère implicite peut être aussi inféré de la précision apportée à propos « d'exercices de synthèses à mettre en oeuvre pour la coordination des acquisitions diverses ».

Avec la "prise de distance" que l'enseignant doit adopter par rapport à ses connaissances, avec l'éventualité d'avoir parfois à remplacer « des démarches rigoureuses » par « des arguments accessibles aux élèves », l'enseignant ne peut pas exposer directement ses connaissances et il ne peut pas non plus les utiliser de la même façon qu'il le faisait quand il était étudiant.

Pour conclure avec le point de vue institutionnel, voyons ce que dit C. Keitel (1988) dans l'article « Le rapport au savoir scientifique et savoir scolaire : éléments pour une discussion ». Nous citerons deux points mais ne retiendrons que le second pour nos travaux. Le premier point est qu'il n'y a pas bipolarité entre savoir scientifique et savoir scolaire, le deuxième est que le savoir scolaire ne peut provenir que de la science.

Puisqu'il n'y a pas bipolarité entre savoir scientifique et savoir scolaire et que le savoir scolaire est déduit du savoir scientifique, C. Keitel conclut qu'il y a nécessairement une réduction du savoir scientifique dans le savoir scolaire.

Nous insisterons pour dire que cette réduction n'empêche pas le savoir scientifique d'être présent (le savoir scolaire en est déduit), nous dirons pour l'instant qu'il est exprimé autrement, en partie de façon non explicite.
Ainsi, du point de vue institutionnel, nous retiendrons que les savoirs mathématiques, y compris universitaires, sont une constante référence dans l'enseignement de mathématiques tel qu'il est approché dans les programmes. Quand ces savoirs sont mis en oeuvre, notamment en classe, ce peut être ou bien de façon réduite ou bien de manière différente de ce qui est fait à l'université (i.e. de l'expérience qu'en avaient les enseignants comme anciens étudiants). Cependant, pour l'institution, ces savoirs doivent être de façon certaine mais non précisée, sous-jacents, implicites dans l'exposé de l'enseignant en classe.
Quant à l'enseignant, il est évident que ses connaissances mathématiques sont indissociables de l'exercice de sa fonction en classe, il doit en avoir conscience et est appelé à les utiliser de manière spécifique.
Le point de vue suivant va nous aider à mieux cerner ces derniers propos.

### *1.2- L'éclairage "enseignant"*

Nous voulons, à l'aide de cet éclairage, repérer des moments où l'enseignant, explicitement ou non, ponctuellement ou globalement, fait appel à ses connaissances mathématiques. Pour cela, nous avons voulu nous aider –dans un premier temps– de la théorie des situations. Nous nous sommes intéressées à l'utilisation qu'en font C. Comiti, D. Grenier et C. Margolinas (1995) dans un écrit sur des travaux dont l'objectif (double et annoncé) était de « participer à la modélisation des interventions didactiques par la caractérisation de phénomènes didactiques particuliers, qui permettent de donner un sens à certaines perturbations ou certains dysfonctionnements de situations didactiques » et de « montrer l'intérêt du fonctionnement de l'outil didactique « structuration d'une situation en différents niveaux ».
Par rapport à nos présents travaux, notre attention a été attirée par la tentative des auteurs de caractériser des niveaux de connaissances particuliers chez l'enseignant. En effet, les auteurs se

sont proposés « de modéliser (...) les connaissances de l'enseignant qui sont simultanément présentes chez lui lors de l'élaboration et de la conduite de sa séquence en classe ». A l'aide du modèle de structuration du milieu, ils ont appelé Ci les connaissances de l'enseignant ou de l'élève en position Pi ou Ei respectivement ($-1 \leq i \leq 3$).

Nous estimons que ces connaissances (Ci) peuvent aider notre recherche car les connaissances mathématiques des enseignants y participent. A ce titres les connaissances (Ci) pourrons nous aider à caractériser les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant sur son cours, par conséquent nous nous approcherons de ces connaissances.

Dans la (rapide) description suivante que nous reprenons des auteurs, nous n'avons retenu que les connaissances Ci de l'enseignant :

- au niveau noosphérien (S3), nous trouvons les connaissances C3. Parlant de l'enseignant, les auteurs disent : « ce sont ces connaissances C3 qui sous-tendent son projet d'enseignement et qui déterminent les connaissances en jeu dans les différents niveaux de la situation »,

- au niveau constructeur (S2), nous trouvons les connaissances C2. Les auteurs précisent : « ...les connaissances C2 sont relatives à la situation d'enseignement/apprentissage qu'il [l'enseignant] veut construire [sur la notion étudiée], connaissances qu'il hiérarchise (les indispensables et les autres) »,

- au niveau projecteur (S1), nous trouvons les connaissances C1. Ce sont les « connaissances globales [de l'enseignant] sur les connaissances et les difficultés habituelles des élèves à propos de [la notion à étudier] »,

- au niveau de la situation didactique (S0) où l'enseignant est en classe en situation didactique avec les élèves, nous trouvons les connaissances C0. Pour l'enseignant, les connaissances C0 sont « des interprétations et/ou des représentations des difficultés des élèves et de leur causes, qui vont lui servir dans l'action pour ses prises de décisions immédiates (micro-décisions) en situation de classe »,

- au dernier niveau, celui de la situation a-didactique, nous trouvons les connaissances C-1. Elles permettent à l'enseignant « de distinguer dans le travail de l'élève les erreurs ou les difficultés qui relèvent du savoir à enseigner, et qui sont donc des *objets sensibles* ». A ce niveau, l'enseignant peut revenir aux connaissances de niveau C3.

A notre avis, les cinq niveaux illustrent bien différents instants où certaines connaissances mathématiques de l'enseignant sont nécessaires. Les cinq niveaux nous montrent aussi une imbrication possible des différentes connaissances –connaissances mathématiques, connaissances sur les mathématiques et connaissances portant sur celles des élèves– dans l'expertise enseignante.

Sans identifier et reprendre avec tant de précision les connaissances dont l'enseignant est censé se servir dans les différentes situations où il peut se trouver, disons déjà, presque comme une évidence, que chacun des différents niveaux (Si) nécessite de l'enseignant différentes sortes de connaissances. Par rapport à nos recherches, nous présentons dans ce qui suit ce qui nous intéresse des connaissances (Ci) de l'enseignant (précisément du côté mathématique de ces connaissances).

Les connaissances mathématiques de l'enseignant peuvent lui servir à déterminer ce qui se rapporte à la notion qu'il va introduire, exposer ou approfondir. Ce choix fait, l'enseignant va adapter ses connaissances aux choix d'apprentissage qu'il a décidé d'adopter. Puis, en fonction des choix d'apprentissage qu'il a décidé de mettre en pratique, ses connaissances pourront l'aider par exemple (cette liste n'est ni exhaustive, ni universelle) :

- à prévoir *a priori* les difficultés que les élèves risquent de rencontrer et à imaginer par avance des solutions de médiation[6] ou remédiation,

- à introduire d'une manière spécifique, en fonction du but poursuivi –qui nécessite une vision relativement globale des connaissances en jeu– l'objet de la séance,

- à créer des obstacles de façon à mettre les élèves en situation problème. Dans cette conception l'enjeu des situations problèmes sera justement, pour les élèves, de surmonter les obstacles. Le moyen de surmonter les obstacles sera de faire en sorte que les élèves fassent appel inefficacement à d'anciennes connaissances déjà en place et en réalisent l'inefficacité...,

- à imaginer plusieurs résolutions pour des mêmes problèmes ou questions, plusieurs introductions ou déroulements de la séance suivant la réception, les réactions, les propositions, les actions ou commentaires des élèves etc.

Ces réflexions nous sont inspirées des connaissances C3, C2 et C1.

---

[6] Nous utilisons le terme dans un sens banal renvoyant aux aides et accompagnements qu'un enseignant peut être appelé à effectuer, sans références directes à Vygotsky.

Poursuivons nos commentaires en nous attardant sur les moments où l'enseignant est en classe avec les élèves dans les situations didactiques ou a-didactiques. Ces moments correspondent aux connaissances C0 et C-1. Dans ces périodes, les connaissances que l'enseignant met en jeu sont celles qui vont lui permettre d'interpréter instantanément les activités, les erreurs des élèves, et qui vont l'aider dans ses prises de micro-décisions. Les micro-décisions prises dans l'immédiateté ne sont en général pas prévues. Quand il s'agit d'événements liés au savoir, nous pensons qu'elles nécessitent de l'enseignant de pouvoir disposer d'un maximum d'éléments mathématiques qui peuvent s'articuler autour de la notion en jeu, ainsi les micro-décisions nécessitent de disposer rapidement des connaissances mathématiques s'y rapportant. Dans ces situations, les références aux connaissances mathématiques ne sont peut être pas toujours faites de façon consciente ; l'enseignant ne s'interroge certainement pas « à quoi ce problème me fait-il penser, quelles sont les connaissances dont je dispose pour ce propos... » car ce serait trop lourd, trop coûteux en temps et qu'il y a certainement des automatismes qui se sont installés. Tout cela nous conduit à dire qu'il doit y avoir au moins à ce niveau une nécessaire disponibilité des connaissances mathématiques de l'enseignant de sorte que les micro-décisions soient rapidement et judicieusement prises afin que la classe ait le plus de chances d'avancer effectivement et efficacement en terme d'apprentissage. Nous juxtaposons automatisme et disponibilité, nous ne les confondons pas[7], cependant profitons-en pour évoquer l'expérience dont l'enseignant débutant ne dispose pas. Nous pouvons croire qu'automatismes et disponibilité des connaissances s'acquièrent avec l'expérience. Nous pensons que des disponibilités particulières sont susceptibles d'accompagner les connaissances des enseignants débutants. Nous en constaterons.

Regardons par exemple un événement particulier lié au savoir : les erreurs que font les élèves. Il s'agit pour l'enseignant de pouvoir les interpréter en les reliant aux connaissances en jeu. Il est bien nécessaire ici que les connaissances relevant du savoir à enseigner, liées à ce qui a provoqué l'erreur ou a été cause de la difficulté soient facilement accessibles à l'enseignant. En fonction des cheminements erronés des élèves cette accessibilité pourra lui fournir des moyens de saisir les causes de problème et d'imaginer des recours pour inviter les élèves à y remédier. Nous

[7] Des automatismes peuvent cacher des rigidités et par suite contrarier la disponibilité des connaissances : il serait intéressant d'observer des enseignants "expérimentés".

retrouvons ici "l'avantage" que peut apporter l'expérience d'anciens enseignants au regard d'enseignants débutants : un ancien enseignant paraît plus outillé puisqu'il possède l'expérience des élèves.

Revenons à nos propos, en fait nous distinguons deux périodes : la préparation du cours et sa mise en pratique. Les connaissances des niveaux C3, C2 et C1 sont celles nécessaires à la préparation du cours. Les connaissances des niveaux C0 et C-1 sont celles nécessaires pendant le cours, nécessaires à sa bonne marche puisqu'il s'agit pour l'enseignant de pouvoir remédier aux problèmes que peuvent éprouver les élèves, mais cela reste lié aux préparations.

Une caractéristique importante des connaissances des différents niveaux Ci est qu'en classe, à aucun moment, nous ne les trouvons directement explicitées par l'enseignant. Celles des trois premiers niveaux n'apparaissent pas directement en classe puisqu'elles n'interviennent que pendant la préparation du cours. Les connaissances des niveaux C0 et C-1 non plus puisqu'elles sont des outils à disposition de l'enseignant pour comprendre ce qui ce passe et pour lui permettre d'adapter ses interventions en fonction de ce qu'il saisit de la situation.

Nous retiendrons l'aspect implicite de ces connaissances, connaissances "supérieures" liées à celles qui vont être exposées. Soulignons également le caractère nécessairement disponible de ces connaissances[8]. Nous y reviendrons.

Donnons un autre point de vue sur l'éclairage "enseignants". Nous disposons de la notion de « transposition didactique » pour suivre "l'itinéraire" des savoirs (savants) mathématiques dans le système didactique. Ce concept permet d'étiqueter (d'un point de vue très formel) les différentes "phases" qui permettent d'adapter les savoirs mathématiques à l'environnement spécifique lié à chacun des cycles scolaires que les élèves, puis les étudiants, fréquentent.

Rappelons avec P. Tavignot (1993) ce qu'en disent quelques auteurs.

- Pour M. Verret (1975), la transposition didactique caractérise le décalage entre le fonctionnement savant du savoir et son fonctionnement dans l'enseignement,

- Pour Y. Chevallard (1985) la transposition didactique permet de pointer la transformation du savoir savant en savoir à enseigner puis en savoir enseigné.

[8] Rappelons ici l'hypothèse admise par les auteurs suivant laquelle l'utilisation des connaissances mathématiques des enseignants peut être problématique, nous en déduisons immédiatement que leur disponibilité peut s'en trouver réduite.

- S'inspirant de Verret (1975) et Chevallard (1985), P. Tavignot indique que de façon générale « les objets du savoir sont transformés, reformulés afin de les transposer dans un contexte différent de celui de leur origine ».
Le concept de transposition didactique nous fournit une modélisation de la transformation des savoirs mathématiques effectuée, disons par l'institution, pour les élèves auxquels ces savoirs s'adressent. La transformation consiste en une adaptation des savoirs à la population constituée des élèves. Concernant les collèges et lycées cette adaptation produira ce qu'on nomme les savoirs du secondaire. Même s'il s'agit bien d'un fonctionnement différent des mêmes savoirs (cf. Verret), nous voyons bien que les savoirs mathématiques sont toujours la base de l'enseignement mais qu'ils sont adaptés. Les enseignants interviennent ici comme « metteurs en scène » des « savoirs du secondaire » tout en ayant une connaissances des savoirs (savants) mathématiques dont ils proviennent.
Soulignons maintenant avec P. Tavignot (1993) un autre point qui illustre ce que nous voulons dire : une autre forme de transposition didactique est "faite" par les enseignants. Elle se situe à un autre "niveau" : « de nombreux phénomènes de glissements s'intercalent entre les décisions ou les orientations des législateurs et la pratique des enseignants », « il existe des rétroactions entre les enseignants et ce qu'ils ont à enseigner, notamment lorsqu'ils préparent un cours, par delà les textes, car interviennent de manière décisive des interprétations étroitement liées aux représentations actuelles des acteurs » (remarquons que cela peut être constitutif du rapport au savoir des enseignants).
Avec P. Tavignot, nous voyons que l'enseignant n'est pas un metteur en scène neutre, il utilise ses connaissances mathématiques, celles reliées aux connaissances à exposer (par le biais de rétroactions) mais qui sont au-delà de celles qu'il expose en classe (il interprète).

Finalement, nous retiendrons et conclurons ceci :

1- l'enseignant de mathématique "détient" des connaissances mathématiques. Au contact des élèves, il se construit des connaissances qui portent à la fois sur les mathématiques et sur les élèves.

2- l'enseignant est appelé dans l'exercice de sa fonction à effectuer "quelque chose" qui ressemble à une transposition didactique et qui a des prolongements en classe. Cette transposition et ces prolongements le conduisent à utiliser de façon implicite certaines de ses connaissances mathématiques.

3- la parole, le support oral dont les enseignants se servent pour exposer leurs cours permet d'introduire en plus une dimension "d'adaptation instantanée" qui se réalise dans le discours de l'enseignant à la classe. Cette dernière est pointée par les connaissances des niveaux C0 et C-1.

Ces trois points sont en général nouveaux pour les enseignants débutants. Pendant le cours il peut y avoir, à cause de cette nouveauté, une perte momentanée des connaissances mathématiques, de celles qui bien souvent restent implicites. Nous voulons voir ce qu'il en est.

## 2- Problématique de la recherche

Nous inscrivons notre étude dans le vaste cadre d'observation et d'analyse de l'enseignement des mathématiques. Dans ce cadre, nous nous proposons de regarder une partie importante et sensible mais cependant restreinte de l'enseignement. Il s'agit de ce que les enseignants proposent comme cours aux élèves[9]. Nous espérons pouvoir inférer de nos observations des conséquences pour la formation des enseignants.

Notre objet d'étude nous a conduit dans un premier temps, à prêter attention à deux aspects de l'enseignement : les savoirs et leurs transmissions[10]. Ceux-ci en ont appelé un troisième : l'apprentissage des élèves. Ces trois aspects nous ont inspiré une question : peut-on isoler un (des) élément(s) de l'expertise enseignante, qui impliquerai(en)t nécessairement les savoirs et leurs transmissions et dont la spécificité serait de favoriser (faciliter) l'apprentissage des élèves ? L'étude particulière de cet (ces) élément(s) contribuerait alors à consolider la formation des enseignants. Beaucoup de travaux ont déjà été réalisés qui nous ont montré l'étendue et la naïveté de ce questionnement. En conséquence, nous avons réduit nos prétentions à l'observation d'un caractère spécifique de l'expertise enseignante chez quelques enseignants.

Nous réservons chacun des cinq paragraphes suivants à la précision de notre problématique.

### *2.1- Des enseignants débutants*

Nos choix d'observation se sont arrêtés sur des enseignants de formation "classique" c'est-à-dire titulaires d'une licence en mathématiques et du CAPES. Une particularité caractérise cependant notre (petite) population d'enseignants finalement retenue, les enseignants ont peu d'expérience dans la profession, ils sont de « nouveaux enseignants » ou enseignants débutants.

Concernant le choix du profil de formation des enseignants, nos motivations reposent sur un constat et une impression. Le constat est le suivant : le parcours "université puis IUFM" est celui qui mène le plus "classiquement" à l'enseignement ; la plupart des enseignants suivent ce

[9] Nous désignons par « cours » tout ce qui porte sur les objets d'apprentissage et que les enseignants proposent aux élèves.

[10] Nous désignons par « transmission » le travail fournit par les enseignants pour que les élèves s'approprient des savoirs mathématiques.

cheminement. L'impression est la suivante : tout se passe comme si on considérait que l'expertise enseignante *découle automatiquement* de cette formation des enseignants, complétée par l'expérience. Or nous avons remarqué (cf. introduction) que les nouveaux enseignants de mathématiques sont confrontés à plusieurs changements : changement de position par rapport aux savoirs, changement d'habitudes ; des choix sont à effectuer dont la logique n'inclut plus les seuls savoirs. Pour l'enseignement, des choix sont à faire dont la logique peut être liée aux élèves, au fait qu'ils sont en train d'apprendre, qu'ils sont en train de construire les savoirs en question. Ainsi des choix sont à effectuer dont la logique doit inclure les élèves. Nous le notions en introduction, pour un enseignant débutant, il apparaît bien là un changement de position par rapport aux savoirs, il n'est plus question de construire pour lui, il s'agit de prévoir, d'entraîner, d'aider, d'accompagner la construction de savoirs chez d'autres. Le professeur débutant est appelé à développer des pratiques pour aménager le contact entre les élèves et les savoirs, pour aider à la construction d'un savoir et d'un rapport au savoir chez les élèves. L'enseignant débutant est conduit à adopter une manipulation des savoirs qui est nouvelle pour lui. Nous comprenons alors que les jeunes enseignants expriment des difficultés lors de leurs premiers pas dans la profession. Les difficultés peuvent entrer en concurrence avec l'installation de l'expertise enseignante. Par ailleurs, nous précisions en introduction qu'une caractéristique de l'expertise est liée à une utilisation en partie implicite de certaines connaissances mathématiques des professeurs. Une installation difficile de l'expertise enseignante peut alors se traduire ainsi : les connaissances mathématiques des professeurs débutants, "héritées" de l'enseignement supérieur (dont le souvenir est encore "récent") et dont certaines peuvent rester implicites sont "à l'épreuve du feu".

Notre étude nous permet de cerner la situation initiale qui sert de base à l'expérience. On ne sait pas si l'expérience permet ou non de réintroduire des connaissances mathématiques mais on peut en douter.

## *2.2- Quelles connaissances ? (mathématiques, méta mathématiques et de niveau n+p)*

Revenons rapidement à l'aspect "savoir". Nous avons pu vérifier (cf. introduction) la nécessaire présence des connaissances et savoirs mathématiques dans l'enseignement, présence dont les formes, les traductions en actes ou en situation d'enseignement pouvaient varier. Ceci nous a permis de conclure à une nécessaire (et évidente) présence de références à des connaissances mathématiques dans l'expertise enseignante : celles liées aux "strictes" connaissances exposées (naturellement) mais également à d'autres, plus approfondies ou plus riches que celles exposées lors d'un cours en classe.

Résumons nos propos : nous considérons que l'apprentissage des mathématiques se fait en grande partie par une acquisition de concepts qui repose sur une construction. Ce processus commence dès l'école primaire, se poursuit jusqu'à l'université et l'enseignant concourt à cette construction. Afin que l'enseignant puisse y concourir, nous avons conclu qu'il est normalement nécessaire qu'il sache lui-même manipuler les concepts en construction chez l'apprenant mais que ce savoir n'était pas suffisant (cf. ci-dessus).

Ces constats établis, essayons de les affiner. Demandons-nous que veut dire "manipuler des concepts aux fins d'entraîner à leur construction" ?

Référons-nous à Robert Noirfalise[11] (1997-98). Il a demandé à des enseignants de collège et de lycée ainsi qu'à des élèves de troisième de rédiger une démonstration d'un exercice précis (dont il a aménagé une formulation particulière pour les élèves). En étudiant la rédaction du premier pas déductif[12] nécessaire à la démonstration, l'auteur note « qu'il y a dans les phrases utilisées pour marquer un pas déductif *deux niveaux de langage* :

- Les *énoncés du langage mathématique* mis en scène dans le problème à traiter (...),

---

[11] L'auteur s'intéresse « au maniement d'énoncés dans une démonstration » et veut « étudier sur quelques exemples comment se règle la formation de certains énoncés et la rédaction de pas déductifs ». Il s'est référé aux travaux de R. Duval et rappelle que « celui-ci distingue deux niveaux d'organisation pour décrire le fonctionnement du raisonnement déductif :

* l'organisation globale propre à l'orientation vers l'énoncé-cible à partir des prémisses, données dans l'énoncé du problème.

* l'organisation locale : c'est à ce niveau que l'on trouve le pas déductif.

Suivant Duval, un pas déductif met en scène trois énoncés : $A \Rightarrow B$

- $A_0$, instanciation de l'énoncé-prémisse A constituant de l'énoncé-tiers,
- $A \Rightarrow B$ l'énoncé-tiers, $A_0$ prémisses du pas déductif — $B_0$ conclusion du pas déductif
- $B_0$, instanciation de l'énoncé conclusion B constituant de l'énoncé-tiers »

L'auteur rappelle : « on dit que l'on instancie un énoncé lorsqu'on donne des valeurs particulières aux variables de cet énoncé ».

[12] Voir note précédente.

- Les *locutions* comme “on sait que”, “donc” (qui) appartiennent à un second niveau de langage, dont la fonction est de montrer comment on manipule les énoncés du premier niveau de langage (...). »

L'auteur précise « ces locutions ont une *fonction sémiotique*, pour reprendre l'expression de Y. Chevallard : elles servent à montrer comment on manipule les statuts des énoncés de niveau 1, les uns relativement aux autres ».

Nous voyons ici deux niveaux de connaissances liés et relatifs aux deux niveaux de langage. Les élèves sont appelés à pouvoir tirer des conséquences du deuxième niveau pour pouvoir travailler au premier niveau. La maîtrise du deuxième niveau, qui est de l'ordre du méta mathématique, n'est pas objet d'apprentissage immédiat et explicite, cependant son voisinage est nécessaire et l'enseignant, lui, doit le cerner. Ainsi, ces deux niveaux peuvent être caractéristiques des niveaux d'utilisation que l'enseignant doit pouvoir manipuler. Nous ne nous aventurerons pas plus loin, mais nous retiendrons que des connaissances “méta” sont nécessaires à l'enseignant pour son enseignement.

Ceci nous permet de retrouver ce que nous formulons maintenant ainsi : enseigner à un niveau (n) nécessite d'exploiter des connaissances de niveau (n+p) (p>0, nous ne chercherons pas à qualifier la valeur de p). Les niveaux (n+p) peuvent apparaître avec les connaissances des enseignants sur les situations, avec les niveaux de conceptualisation[13] (acquis des enseignants) différents de ceux des élèves, ils peuvent apparaître avec l'utilisation par les enseignants d'exemples génériques ou encore de formules générales pour décrire des situations. Ces exemples peuvent faciliter la construction chez les élèves de pré-concepts qui évolueront éventuellement en concepts. Les niveaux (n+p) apparaîtront aussi avec des connaissances plus précises et plus développées des enseignants ainsi qu'avec l'intervention de propos que nous pourrons associer à une recherche de rigueur.

Un élément important pour notre étude des connaissances mathématiques à l'épreuve du feu est justement l'analyse de cette plus ou moins grande présence des connaissances mathématiques alors qu'elles peuvent sembler lointaines ou cachées[14].

---

[13] Cf. A. Robert (1997) in Dorier.

[14] Nous pouvons aussi nous questionner sur l'impression que l'on peut éprouver de perdre de vue les savoirs et d'en voir apparaître d'autres. Précisons ici qu'une non-utilisation de connaissances de niveau (n+p) n'est pas forcément due au fait ne pas en avoir à ce niveau.

De notre point de vue, c'est en particulier à propos de l'exploitation des connaissances de niveau (n+p) que formation universitaire et formation IUFM peuvent intervenir en donnant une certaine "profondeur" au contenu de savoir du niveau (n) auquel les enseignants enseignent. La profondeur peut se traduire par exemple par une utilisation spécifique des objets mathématiques manipulés pendant le cours, par une organisation particulière de ces objets, par des commentaires, par des implicites etc. que nous (chercheurs) pouvons reconnaître. Autorisons-nous une métaphore : un conférencier est compris ou entendu de ses auditeurs par les allusions qu'il peut faire à des références connues d'eux, parfois il lui suffit d'un mot pour qu'une idée "passe", que tout un "bloc" de pensée soit établi. Le discours peut présenter différentes "strates" qui s'influencent et peuvent être reconnues, repérées et saisies par un auditeur "averti". Disons que les connaissances mathématiques de niveau (n+p) peuvent laisser des traces dans un exposé de niveau (n).

Revenons plus globalement à la transmission que l'enseignant effectue pour favoriser l'apprentissage des élèves. Nous pouvons supposer qu'en classe, savoirs et transmission sont des soucis majeurs de l'enseignant. Cette supposition peut nous laisser croire qu'il est très facile d'identifier les connaissances mathématiques que l'enseignant met en jeu quand il expose un cours, que ces connaissances sont presque explicites. En réalité, du fait de la situation de classe, du fait des choix effectués pour l'enseignement, du fait du public concerné, nous devons nous rendre à l'évidence que les connaissances mathématiques de l'enseignant, notamment celles de niveau (n+p), restent (doivent rester ?) bien souvent implicites (même si parfois l'implicite est inconscient). C'est pourquoi nous privilégions la notion de "traces", traces de connaissances mathématiques de niveau (n+p) dans le cours d'un enseignant de mathématiques en situation de classe.

### *2.3- En classe (un observatoire privilégié)*

Nous retenons la situation de classe car à notre avis, la classe est un lieu privilégié où savoirs, transmission et apprentissage se rencontrent (nous retrouvons les trois pôles du système didactique). Mais la classe est le lieu où "tout" se complique pour un enseignant et notamment, pour un enseignant débutant. Bien entendu, en classe le but du scénario que l'enseignant met en place, de l'organisation qu'il donne aux connaissances, de ce qu'il fait est la construction et l'acquisition de nouvelles connaissances mathématiques par les élèves. La présence des élèves, leurs réactions sont des éléments indispensables au jeu de construction auquel ils sont invités. Dans cette situation, l'enseignant est dans le feu de l'action, il doit considérer (prendre en compte, analyser et interpréter) les actions ou réactions des élèves, il n'a pas le recul, le temps que lui laisserait une situation autre, hors de la classe. Hors de la classe, nous pouvons aisément admettre que les références à des connaissances mathématiques sont plus faciles à faire[15], qu'elles sont plus disponibles à l'enseignant. Comment cela peut-il se traduire en présence d'élèves ?

Nous considérons que les nouvelles connaissances des élèves se construisent sur de plus anciennes déjà en place, qu'à terme les connaissances ne sont pas isolées, elles "s'organisent" entre elles, et que cette organisation contribue à rendre possible les apprentissages. Un apprentissage des élèves étant à long terme l'objectif essentiel de l'enseignant, celui-ci peut tenter de rentrer dans ce processus d'organisation pour le favoriser. Cette tentative peut être un élément constitutif de l'expertise enseignante, elle peut être aussi une traduction de l'adaptation de l'enseignant à la classe. En étudiant en particulier la manière dont l'enseignant tente cette restitution de la pensée de l'élève, par exemple dans la dynamique ancien/nouveau[16], nous pensons pouvoir remarquer des traces de l'organisation propre de l'enseignant et estimer la mise en jeu de ses propres connaissances mathématiques. En fait, nous pensons que cette restitution peut nécessiter de l'enseignant la mise en jeu de connaissances de niveau (n+p). Pour la dynamique ancien/nouveau, il nous semble qu'il y a nécessité de mettre en jeu des connaissances liées à celles de niveau (n). Ainsi, il nous paraît possible de voir en particulier dans ces moments des traces de référence à des connaissances de niveau (n+p).

[15] L'enseignant n'est pas contraint par le temps, il peut formuler différemment la situation abordée, il peut s'aider de documents...
[16] Sur la dynamique ancien/nouveau, voir R.Douady (1986).

### *2.4- Le discours*

En classe, le contenu du cours d'un enseignant est accompagné d'un discours, de gestes, de mimiques, de toute une activité. Cette activité "de classe" consiste en grande partie à "apprêter" les connaissances mathématiques pour les faire construire et acquérir aux élèves. Nous considérons d'ailleurs que cette façon d'apprêter les connaissances mathématiques est une partie de l'expertise enseignante. Dans cette partie de l'expertise enseignante, nous nous intéressons particulièrement au discours comme vecteur de ce qui est proposé aux élèves. En effet, nous pensons que l'activité orale est la partie du cours qui peut s'adapter le plus facilement à chaque situation de classe. Nous accordons beaucoup d'importance à la qualité d'adaptation que possède la parole. L'adaptation peut être une action effectuée par l'enseignant qui se répercute dans son discours. S'adapter aux élèves demande à l'enseignant de pouvoir sur-le-champ interpréter ce qui se passe, reconnaître des compétences, des erreurs, des points de vue et formuler des questions, des réponses ou des commentaires suivant la situation. S'adapter peut demander de connaître, reconnaître, avoir prévu plusieurs approches pour une même notion, un même obstacle, un même exercice et pouvoir changer une approche par une autre ou aller de l'une à l'autre : changer de cadre, aller de l'un à l'autre. Nous estimons ici que les connaissances de niveau (n+p) peuvent jouer un rôle pour que l'adaptation se fasse aisément. Ainsi, nous pensons que pour que l'enseignant puisse adapter son discours à ce qui se passe en classe, il doit accéder facilement à ses connaissances, celles de niveau (n) mais aussi celles de niveau (n+p). Finalement, nous nous interrogeons ainsi précisément sur les connaissances de différents niveaux, directement mathématiques ou non que l'enseignant met en jeu quand il enseigne, que ces connaissances apparaissent directement ou indirectement dans son discours aux élèves.

### *2.5- Les traces*

Nous avons donc choisi de regarder les emprunts que l'enseignant effectue à ses connaissances mathématiques et, en particulier à ses connaissances de niveau (n+p). La méthode que nous avons retenue pour déceler les références effectuées est de repérer les traces qu'elles produisent dans le discours de l'enseignant.

Nous nous intéressons donc aux traces produites par les connaissances mathématiques de niveau (n+p) de l'enseignant dans le discours oral qu'il tient aux élèves lors d'un cours de niveau (n).
Précisons encore un point, la progression des apprentissages en grande partie gérée et guidée par l'enseignant est affectée d'une double échelle de temps, une annuelle et une plus ponctuelle qui correspond à une séance de cours. D'une échelle de temps à l'autre, les buts de l'enseignant peuvent différer. Puisque nous estimons qu'en général une séance est porteuse d'apprentissage pour les élèves, nous pensons qu'il est possible de voir si l'enseignant, dans sa gestion des apprentissages et à l'échelle d'une séance manipule ses connaissances pour concevoir des situations qui, jouées par les élèves, seront porteuses d'apprentissage. Ainsi, nous nous attendons à ce que dans cette gestion à l'échelle d'une séance, il soit possible d'identifier des moments où l'enseignant met en oeuvre implicitement et de manière particulière des connaissances mathématiques. Nous pensons d'ailleurs qu'il y a au moins une occurrence où on peut percevoir des conséquences de la mise en oeuvre des connaissances mathématiques (nous y avons déjà fait allusion). Ces conséquences peuvent être traduites par les notions d'adaptation et d'adoption. L'enseignant peut adopter le niveau auquel il enseigne (auquel cas, il joue au « bon élève ») ou bien il peut s'adapter à ce niveau. En quelque sorte dès qu'un enseignant propose un cours, il se situe par rapport à ce qu'il enseigne. Nous pouvons dire qu'il s'agit pour nous de chercher où se situe l'enseignant par rapport à ce qu'il enseigne, au niveau mathématique où il enseigne. Nous espérons trouver des enseignants qui s'adaptent, c'est-à-dire qui utilisent leurs connaissances de sorte à les adapter aux situations qui se présentent (dans un objectif donné) plutôt que des enseignants qui adoptent le niveau des élèves.
Nous estimons que pour s'adapter à une classe, l'enseignant met en jeu certaines de ses connaissances (n+p) et que cette adaptation peut être "décryptée" dans sa production. Production en termes de scénario, de gestion des échanges avec la classe, d'interfaces locaux et ponctuels que l'enseignant organise entre les connaissances et les élèves.
Nous traduisons l'adaptation de l'enseignant à une classe (de façon non exhaustive) par les points suivants.

- L'enseignant peut décider de freiner, bloquer la classe sur un objet d'enseignement ou au contraire la faire aller très vite. Evidemment, il se peut que parfois un enseignant s'oblige à s'attarder sur un point pour une raison spécifique (montrer l'importance de quelque chose, mettre en relief un élément ou un aspect particulier...).

- L'enseignant doit pouvoir situer, (dans ses connaissances et) dans les connaissances des élèves ainsi qu'en fonction du niveau d'enseignement, tout objet d'enseignement abordé.

- Suivant l'objet de cours abordé, l'enseignant demande implicitement aux élèves de pouvoir travailler avec l'un des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (technique, mobilisable ou disponible[17] ). Pour un objet donné, l'enseignant peut aussi demander aux élèves de passer d'un niveau de fonctionnement à un autre en les conduisant si nécessaire à ce changement. Ces niveaux nécessitent de la part du professeur une connaissance de leurs caractéristiques (cette connaissance n'est pas obligatoirement explicite) et la reconnaissance des moments ou des situations où il est possible que ces niveaux soient abordés.

Nous nous servirons de ces points pour notre étude.

Les notions d'adaptation et d'adoption nous semblent importantes car nous pensons que selon la manière (orale) dont le déroulement des échanges est amené, selon l'explicitation des raisonnements, des méthodes, des rapprochements..., les apprentissages peuvent différer.

*Quand l'enseignant se trouve en cours avec les élèves, il tente de contribuer à la construction de leurs connaissances mathématiques de niveau (n), il leur permet de mieux en asseoir certaines, peut-être toutes. Ce faisant, il utilise des connaissances mathématiques qui sont les siennes et dont nous disons qu'elles sont de niveau (n+p) (en termes de contenu, de mises en relation, de*

[17] Rappelons A. Robert (1998)
*Niveau technique* : « Ce niveau correspond (...) à des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. Il s'agit donc de contextualisations simples, locales, sans étapes, sans travail préliminaire de reconnaissances, sans adaptation. Cela concerne plutôt le fonctionnement des outils (y compris des définitions).
*Niveau des connaissances mobilisables* : Ce niveau correspond à des mises en fonctionnements plus larges : encore indiquées, mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois. Ce peut être parce qu'il faut adapter ses connaissances pour appliquer le théorème adéquat, ou changer de point de vue ou de cadre (avec indication), ce peut être parce qu'il faut appliquer plusieurs fois de suite la même chose ou utiliser plusieurs choses différentes, en étapes successives, ou parce qu'il faut articuler deux informations de nature différente. Dans tous les cas, ce niveau teste une mise en fonctionnement où il existe un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation, il n'y a pas seulement application simple, les caractères outils et objet peuvent être concernés. Mais ce qui est en jeu est explicite. Autrement dit, un savoir est dit mobilisable si, lorsqu'il est bien identifié, il est bien utilisé par l'élève, même s'il y a lieu de s'adapter au contexte particulier.
*Le niveau des connaissances mobilisables* : Ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller chercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. Par exemple pouvoir donner des contre-exemples (retrouver ou inventer), changer de cadres sans suggestion (mise en relation), appliquer des méthodes non prévues, participent à ce qui est repéré par ce niveau.

*rapprochements, d'interprétations, d'organisation, de commentaires...). Certaines de ces connaissances peuvent rester implicites.*

*Ainsi, nous considérons qu'il y a un lien entre ce qui est fait en classe avec les élèves et les connaissances mathématiques (universitaires et autres) de l'enseignant. Nous considérons que les connaissances mathématiques d'un enseignant ne s'utilisent pas directement dans l'enseignement comme elles sont "stockées" tout de suite après les études (d'où l'intérêt d'observer des débutants). Il y a nécessairement une adaptation, qui peut être une adoption pure et simple du niveau (n), avec oubli apparent du reste ou non.*

*Nous nous interrogeons précisément sur les connaissances mathématiques ou méta mathématiques que l'enseignant met en jeu quand il enseigne :*

*Est-il possible en classe, de reconnaître des connaissances mathématiques de différents niveaux (jusque celles issues de la formation universitaire et IUFM), y en a-t-il d'autres, y a-t-il autre chose, n'y a-t-il "que" des connaissances correspondant au niveau (n) auquel l'enseignant enseigne... ?*

*Nous pensons que même si les connaissances mathématiques de niveau (n+p) ne s'expriment pas explicitement, elles laissent des traces dans le cours d'un enseignant, particulièrement dans la prestation orale de ce cours.*

*Nous considérons donc que le lien entre ce qui se fait en classe à un niveau (n) et les (des) connaissances mathématiques de niveau (n+p) de l'enseignant laisse des traces dans le cours et, précisément dans le discours que l'enseignant tient en classe aux élèves. Ce sont ces traces que nous voulons chercher.*

Pour cela, nous comptons analyser le discours de l'enseignant de sorte à repérer les moments où il mobilise des contenus mathématiques ou sur les mathématiques et repérer la façon dont il les met en oeuvre.

## *B- Méthodologie*

### 1- Méthodologie générale

La méthodologie que nous mettons en œuvre pour analyser le discours repose sur deux hypothèses admises. L'une est spécifique aux enseignants, l'autre est spécifique aux manuels, accessibles à tous (élèves, enseignants, parents...) et présents dans « l'univers scolaire ». Concernant les enseignants, nous supposons qu'ils préparent leurs cours avant de les exposer aux élèves[18]. Concernant les manuels, il nous semble pertinent de supposer que ceux habituellement utilisés en classe par les élèves et (ou) les enseignants à un niveau (n) sont indicateurs du niveau (n) en question (surtout quand le manuel précise ce niveau (n) auquel il s'adresse).

Notre hypothèse sur les enseignants nous permet d'accéder à un certain travail qui leur est personnel. Nous voyons dans ce travail, en référence à la transposition didactique (cf. introduction et P. Tavignot 1993), un résultat pratique et matériel de celle-ci. Nous schématisons ce travail ainsi : à partir des intitulés des programmes officiels, de documents et des connaissances qu'ils ont, les enseignants construisent un cours. Pour ce qui nous intéresse, nous ne retiendrons des préparations des enseignants que les conséquences, c'est-à-dire que ce qu'il en résulte en classe. En effet, c'est en particulier et en partie grâce aux conséquences du travail "de préparation" sur le déroulement du cours en classe que nous espérons trouver des traces de présence d'organisation et de réflexion de connaissances mathématiques. Ce sont précisément ces traces que nous recherchons.

---

[18] Sur ce point nous pouvons supposer l'existence de différences entre enseignants débutants et enseignants expérimentés. L'organisation, la forme, le contenu évoluent certainement en fonction de l'ancienneté. L'utilisation des préparation en classe peut elle aussi évoluer : document principal, aide mémoire...

### *1.1- Recueil des données*

Nous avons analysé les discours de trois enseignantes différentes portant sur trois contenus différents de la classe de Troisième. Les discours sont enregistrés (sur cassettes audio) et les enregistrements sont transcrits.

#### 1.1.1- Le profil des enseignants

Notre choix s'est porté sur des enseignants de classe de Troisième des collèges. Nous avons voulu que ces enseignants soient nouvellement nommés, plus précisément qu'ils en soient à leur deuxième année pleine d'enseignement. Les motivations de ce choix sont :

- en tant que nouveaux enseignants, les derniers souvenirs de mathématiques sont ceux datant de la période où ces enseignants étaient étudiants, nous espérons que cette situation favorise une proximité des connaissances de niveau (n+p),

- ce sont des titulaires ; nous espérons voir le travail des enseignants en fonction de ce qu'ils se représentent de la classe et non pas un travail qui serait le résultat particulier d'enseignants en fonction de ce qu'ils se représentent de l'année de titularisation,

- nous voulions observer des enseignants ayant déjà une petite expérience des élèves, construite lors de leur première année d'enseignement. Nous ne voulions pas observer des enseignants ayant plusieurs années d'expérience pour ne pas avoir affaire à une "routine" qui se serait installée.

Par ailleurs, nous estimons que la deuxième année d'enseignement peut être vue comme une "libération" des contraintes liées aux études, à la stabilisation dans un poste, à la connaissance des conditions de travail (relation entre collègues, avec les élèves, l'administration...), à la connaissance du cadre de travail.

Dans l'ensemble, nous espérions voir apparaître "facilement" les connaissances mathématiques des enseignants et nous espérions voir presque en direct les transformations sur les connaissances mathématiques des enseignants que provoquent les élèves.

### 1.1.2- Le profil des élèves

Nous avons décidé d'observer des enseignants évoluant dans un cadre le plus "banal" possible. Nous avons choisi d'observer des classes "ordinaires" : ce ne sont pas des classes d'établissements classés en *ZEP* ni des classes repérées comme composées d'élèves particulièrement brillants dans leurs études, ce sont des classes "moyennes".

### 1.1.3- La sélection des enseignants

Aline Robert s'est chargée de repérer des enseignants répondant aux critères ci-dessus, elle a dressé une liste qui nous a servi de base de travail. Chaque enseignant a été contacté par téléphone, des rendez-vous ont été fixés pour observer les cours. Finalement trois enseignantes ont été retenues.

### 1.1.4- Déroulement des observations

Dans la prolongation des choix déjà exposés, nous ne voulions pas qu'il y ait une préparation particulière des séances observées[19]. Nous n'avons donc pas demandé aux enseignants de nous inviter sur un contenu précis et nous ne leur avons demandé aucun détail particulier quant à l'exposé de cours qu'ils allaient faire. Nous leur avons simplement demandé de nous inviter lors d'un cours d'algèbre puis d'un cours de géométrie. Nous avons enregistré l'ensemble des discussions intervenues entre les élèves et les enseignantes à l'aide d'un Dictaphone posé sur une table au fond des salles de classe.

[19] Le "simple" fait de savoir qu'il va être enregistré et donc observé peut entraîner l'enseignant (débutant) à préparer spécifiquement son cours, nous n'avons aucune prise sur ce point mais considérons qu'il n'est pas excessivement important.

### 1.1.5- Les transcriptions de discours

Afin de transcrire le plus fidèlement possible ce que nous avons enregistré, nous avons adopté quelques conventions :

- lorsqu'il ne peut pas y avoir confusion sur l'écriture d'expressions algébriques, nous adoptons un symbolisme mathématique,

- lorsqu'il peut y avoir confusion sur l'écriture d'expressions algébriques, nous écrivons les propos en lettres[20],

- lorsqu'un enseignant ou un élève évoque un point du plan par la lettre qui lui est attribuée, nous transcrirons cette lettre en majuscule,

- lorsqu'un enseignant ou un élève évoque un segment à l'aide des points extrémités en précisant « segment », nous adoptons la notation réservée au segment. Si le mot segment n'est pas prononcé, nous n'adoptons pas la notation[21].

## *1.2- Premières analyses*

Nos hypothèses spécifiques aux manuels et aux méthodes de travail des enseignants nous conduisent à mener notre recherche suivant deux axes dont le développement occupera les chapitres II et III. Le premier axe est la prise en compte du contenu du discours et de la façon dont il est présenté aux élèves. Le deuxième axe est la prise en compte du manuel de mathématiques en relation avec le discours.

---

[20] « Deux x moins trois » peut être la lecture de 2x - 3 ou 2(x - 3). L'intonation, la succession des paroles peut indiquer une écriture plutôt qu'une autre, ainsi lier deux et x en les lisant rapidement, marquer une pose dans le débit des paroles et prononcer le reste (-3) peut être la lecture de 2x - 3. Ne pas lier deux et x, marquer une pose dans le débit des paroles entre « deux » et « x » et prononcer le reste peut être la lecture de 2(x - 3). Cette façon de parler est plus difficile à mettre en pratique pour $\frac{\sqrt{2x-3}}{5}$. L'environnement des propos tenus ainsi que l'écrit au tableau peuvent faciliter la compréhension, cependant nous avons choisi de transcrire les enregistrements comme les élèves les entendent et non comme ils les voient (les enseignants n'écrivent pas tout ce qu'ils disent) ou comme ils les comprennent.

[21] Voir note précédente.

### 1.2.1- Premier axe

La prise en compte des propos de l'enseignant se traduit dans notre travail par une analyse spécifique du discours sur lequel nous nous livrons à deux "découpages".

*Premier découpage du discours*

Le premier découpage du discours repose sur trois critères dont deux sont strictement liés aux contenus mathématiques, il s'agit de la forme et de la fonction du discours. Le troisième critère est lié à la façon dont les enseignants s'adressent aux élèves que nous désignons par « relief du discours ».
Nous avons déterminé trois catégories pour la fonction (information, argumentation et structuration) chacune est subdivisée en trois ou quatre sous-catégories. Pour la forme du discours nous avons retenu deux catégories (contextualisé et décontextualisé) non subdivisées. Le relief présente trois catégories (question, réponse et accompagnement) non subdivisées.
Nous répartissons les propos des enseignants suivant ces (sous-) catégories. Tout changement de catégorie ou de sous-catégorie définit une unité de discours[22]. Afin de repérer les catégories des unités de discours, nous avons adopté un codage que nous présentons en annexe.
Le résultat de ce premier découpage figure en annexe. Nous l'exploitons dans la première partie du chapitre II où nous procédons à de succinctes analyses des fréquences d'apparitions des différentes unités de discours. Pour cela nous dressons plusieurs tableaux où nous indiquons les nombres d'unités enregistrées par (sous-) catégories[23].

*Deuxième découpage du discours*

Le deuxième découpage auquel nous livrons le discours est directement lié à la « forme » du discours. Il consiste en la constitution de « passages décontextualisés » et sera la base des

[22] Nous ne tenons pas compte de la longueur des propos, du registre de la langue (familier, soutenu...) ni des gestes et autres attitudes physiques qui peuvent accompagner le discours. De même nous ne tenons pas compte du tableau.
[23] L'une des sous-catégories du discours d'information sera indiquée entre parenthèses et n'entrera pas dans les totaux généraux. Nous indiquerons la catégorie concernée après l'avoir définie et expliquerons son exclusion (cf. méthodologie précise 2.1.3).

analyses que nous exposons en deuxième partie du chapitre II. La dénomination « passage décontextualisé » est due au fait que pour ce découpage, nous tenons compte de la forme décontextualisée du discours[24].

Ce découpage, qui sera en partie arbitraire, nous permettra de traiter et d'analyser des passages que nous espérons assez courts afin de pouvoir les manipuler plus aisément pour en tirer des résultats.

Afin de déterminer si les enseignants mettent en œuvre leurs connaissances de niveau (n+p), nous analysons les passages décontextualisés de sorte à esquisser la situation didactique des élèves et l'emprise des enseignants sur cette situation. L'implicite des échanges entre les élèves et les enseignants jouera un rôle important qui nous conduira à des développements qui parfois sembleront s'écarter de notre propos. Nous devrons tenir compte des propos des élèves afin de cerner leurs conséquences sur les enseignants, ces prises en compte nous conduiront elles-aussi à certains développements. Nous nous attacherons à estimer comment les enseignants s'adaptent aux élèves.

### 1.2.2- Deuxième axe

Notre prise en compte du manuel se traduit par une comparaison des discours des enseignantes aux contenus des manuels. Involontairement, les enseignantes observées ont "facilité" notre travail en exposant un cours dont le contenu correspond à un chapitre précis du manuel utilisé par les élèves de leur classe. En comparant leur discours à ce chapitre précis, nous tenterons de découvrir si les enseignantes sont influencées par le manuel, si leurs connaissances sont concurrencées.

Les chapitres II et III seront ainsi réservés aux analyses de discours. Le chapitre II ne fera intervenir que le discours, tandis que le chapitre III fera intervenir le manuel. En conséquence, ils auront pour titres respectifs « le discours » et « le manuel ».

---

[24] Nous renvoyons à la méthodologie précise pour la définition de la forme décontextualisée et pour la définition des passages décontextualisés (cf. 2.1.2.1).

Nous abordons la méthodologie précise où nous justifions le choix de nos deux axes et précisons nos procédures pour chacun d'eux.

## 2- Méthodologie précise

### *2.1- Prise en compte du discours*

#### 2.1.1- Pourquoi prendre en compte le discours ?

En classe, une prérogative essentielle de l'enseignant est d'aménager un environnement à caractère mathématique dont l'objectif principal est d'insérer les notions mathématiques à acquérir dans les connaissances déjà en place des élèves. Cette insertion se fait au moyen de processus qui conduisent à la construction de résultats, de raisonnements, de mises en relation etc. Nous désignons par médiation l'aménagement ainsi effectué par l'enseignant. Il met en jeu l'enseignant, les élèves et le savoir. Nous jugeons cet élément important à regarder quand nous voulons voir "où en est" la classe, ce que l'enseignant veut transmettre. Une conséquence de cet aménagement est en général la production d'un écrit à caractère mathématique qui constitue un témoignage de l'activité mathématique de l'ensemble de la classe (enseignant et élèves) et qui est institutionnalisé par l'enseignant. L'écrit est donc accompagné d'un dialogue qui supporte une grande part de la médiation qu'effectue l'enseignant. Le discours du professeur, partie essentielle du dialogue présente alors un intérêt certain.

Nous pensons que la médiation peut être lue dans le discours de l'enseignant, nous voulons la lire dans le discours mais du seul point de vue des connaissances mathématiques.

Le dialogue est un échange qui implique plusieurs partenaires, chacun évoquant un point de vue. En classe, les partenaires sont l'enseignant et les élèves et les points de vue consistent en l'expression instantanée d'un certain état des connaissances évoquées. Les protagonistes du dialogue peuvent choisir d'adapter réciproquement leurs propos : caractéristique spécifique du discours, l'adaptation nous semble importante. L'enseignant peut disposer de cette possibilité à tout instant, à tout instant il peut adapter la médiation que constitue son discours à l'état qu'il se représente pour la classe, en fonction des réactions de celle-ci. En classe, cette disposition peut être jointe à d'autres manifestations, à d'autres formes que des formes orales : changement du projet initialement prévu et préparé, ajout ou suppression d'exercices, ajout ou suppression de développements spécifiques, modification du "texte" retenu pour être institutionnalisé etc.

Nous estimons que cet ensemble de modifications est décelable dans le discours et peut être mis en relation avec les connaissances propres de l'enseignant.
Notre avis est que la médiation met en jeu le savoir mathématique et nous considérons qu'une certaine lecture peut nous informer sur l'état de ce savoir précisément du côté de l'enseignant. Tout en nous posant des questions sur l'utilité des propos que l'enseignant tient en classe lorsqu'il dit des choses nouvelles, lorsqu'il donne des informations, nous questionnons la manière dont son discours s'articule pour accompagner ces informations, l'apprentissage et la construction de connaissances chez les élèves. Comme l'ont fait C. Hache et A. Robert (1997), nous voulons tenter une analyse du discours dont l'objectif sera de nous conduire aux connaissances mises en jeu par l'enseignant en traquant les traces que ses connaissances de niveau (n+p) ont pu laisser dans son discours. Nous nous efforcerons de déterminer ce qui peut faire référence à des savoirs mathématiques, nous chercherons toutes les phrases dans le discours où on voit des mathématiques mises en mots ou un début de réflexion sur les mathématiques. En observant la façon dont l'enseignant fait fonctionner les connaissances actuelles, nous voulons voir si d'autres connaissances sont utilisées. Nous essaierons de repérer ce qui peut provenir des connaissances passées de l'enseignant, dépassant les strictes connaissances enseignées actuellement. Nous regarderons ce qui témoigne de ces connaissances (notions, liens entre les notions, mode de raisonnement, ordre des arguments, hiérarchie de ce qui est pris en compte, changement de cadre ou de point de vue, utilisation du générique ou du général, rigueur...). C'est-à-dire si les différentes dimensions qui peuvent intervenir dans le cours sont importées et adaptées des connaissances supérieures de l'enseignant ou s'il y a adoption pure et simple d'un autre point de vue.

### 2.1.2- Comment analyser le discours ?

Nous allons procéder à un découpage du discours suivant les trois critères forme, fonction et relief. Rappelons que forme et fonction sont directement liées aux contenus mathématiques du discours, le relief est lié à la façon dont les enseignants s'adressent aux élèves.
Les deux critères liés aux contenus mathématiques nous permettront de repérer toutes les manifestations de connaissances mathématiques. Les différentes caractéristiques de ces deux

critères (que nous exposons dans ce paragraphe) nous aideront à déterminer le rôle (simple technique, technique plus élaborée, explication...) que les enseignantes attribuent à leurs propos. Nous attendons de l'analyse des passages décontextualisés qu'elle nous permette de retrouver les connaissances des enseignantes qui les ont conduites à attribuer le rôle que nous avons reconstitué à l'aide des critères fonction et forme. Nous espérons ici, trouver des traces de connaissances de niveau (n+p).

L'objectif que nous attachons au "relief" est de nous permettre de déterminer comment les enseignantes échangent avec leur classe. Nous pensons que l'étude croisée du relief avec les deux autres critères nous permettra de donner une estimation de l'adaptation des enseignantes aux élèves et sur quels contenus l'adaptation a lieu. Nous pensons que ces deux données (adaptation et contenus) nous conduiront elles-aussi à déterminer le niveau d'utilisation des connaissances des enseignantes.

Dans ce qui suit, nous présentons les trois critères, nous les justifions par rapport à notre recherche, nous les détaillons et les illustrons d'exemples.

Les exemples proposés sont issus des discours que nous avons enregistrés. Ils sont parfois accompagnés d'autres interventions afin de leur donner sens. Lorsque cette situation se présente, nous soulignons la partie du discours servant d'exemple.

#### *2.1.2.1- La forme du discours*

Classiquement, en didactique des mathématiques, dans toute séance de mathématiques, nous distinguons des moments de décontextualisation des savoirs et d'autres moments de contextualisation. La dialectique entre les deux est fondamentale à nos yeux. L'enseignant et la classe peuvent avoir une grande influence sur la fréquence, l'importance et la "profondeur" de ces moments. Ceux-ci, contextualisés ou décontextualisés, portent toujours et évidemment sur des contenus mathématiques.

Dans notre étude, nous répartirons les interventions des enseignants entre mathématiques décontextualisées et mathématiques contextualisées suivant les critères que nous définissons plus loin. Nous les distinguerons car les moments où l'enseignant décontextualise font apparaître des éléments de savoirs mathématiques institutionnels et peuvent nous servir pour repérer ce que nous cherchons. Ces repères nous permettront par exemple de cerner les propos auxquels l'enseignant accorde de l'importance lorsqu'il les énonce ou les fait noter et quel degré de généralité – quelle forme – il associe à ces propos. Les commentaires assortis – s'il y en a – nous y aideront.

*Définitions et exemples*

*Décontextualisé*

Une partie du discours sera dite décontextualisée si nous reconnaissons une des caractéristiques suivantes :

- les propos indiqués font apparaître un élément mathématique qui n'appartient pas au contexte (une généralité, un article indéfini, un quelque soit, une question amenant à sortir du contexte ou changer de cadre...)
- les propos indiqués citent le texte d'une propriété, d'un théorème, d'une définition n'ayant aucun élément mathématique appartenant au contexte,
- l'enseignant conduit les élèves à généraliser (suite à un cas particulier traité),

Exemple :

« voilà c'est une équation, tu fais la même opération des deux côtés »

« La somme des carrés des côtés (de l'angle droit) égal le carré de l'hypoténuse »

« ça n'a pas beaucoup d'importance on a quand même la différence de deux carrés ».

*Contextualisé*

Une partie sera dite contextualisée si nous reconnaissons au moins une des caractéristiques suivantes :

- les éléments (objets, thèmes, outils, procédures...) mathématiques cités dans la phrase appartiennent au contexte de l'exercice en cours,
- il s'agit de calculs et applications,

- l'expression utilisée par l'enseignant n'est pas assez développée pour laisser entendre qu'il ne s'agit pas d'un cas particulier (dans l'expression « là je prends la racine », « là » devrait vouloir dire par exemple : c'est un carré donc je prends la racine... mais rien n'indique spécifiquement cette signification)

- l'expression dans laquelle nous (chercheurs) pourrions lire un sous-entendu qui pourrait être décontextualisé n'est pas suffisamment développée de sorte qu'elle reste liée à l'exercice. Ce sont les situations où l'enseignant n'arrive pas à "sortir" de l'exercice ou en sort difficilement (même exemple que ci-dessus).

Ces deux derniers points sont essentiellement une conséquence du vocabulaire utilisé. Dans l'exemple précédent, n'étant pas développée par l'enseignant, la préposition « là » peut laisser croire que ce n'est que dans la situation de l'exercice (qui n'est pas précisée) qu'il faut utiliser la racine. La situation n'est pas assez précise pour pouvoir y lire un sous-entendu qui aurait par exemple cette teneur : « Nous cherchons un nombre dont le carré a une valeur positive. Par définition de la racine, nous pouvons dire que... »

*Passages décontextualisés*

Nous avons retenu deux caractéristiques pour déterminer les « passages décontextualisés ». La première est basée sur la présence de plusieurs interventions contextualisées entre deux successions d'interventions décontextualisées consécutives, même si du point de vue des contenus, ces dernières portent sur le même thème. Chacune d'elles déterminera alors un passage. Ainsi, plusieurs phrases contextualisées intercalées entre deux séries d'interventions décontextualisées nous feront définir deux passages décontextualisés. La deuxième caractéristique prend en compte le contenu du passage. Tout changement d'objet des propos de l'enseignant au cours d'une même série d'interventions décontextualisées nous conduira à introduire un changement de passage.

### *2.1.2.2- La fonction du discours*

i- Fonction « argumentation »

Un aspect de la médiation entre le savoir et les élèves que nous voulons lire dans le discours de l'enseignant est tout ce qui implique un contenu mathématique précis (identifiable par un titre, un mot, l'énoncé d'un objet...) et où il est possible de détecter une volonté de transformation qualitative du contenu. La volonté de transformation peut se manifester par :

1- une découverte de nouveaux contenus (autres que les "simples" énoncés de texte et se traduisant par la mobilisation de l'ancien),

2- une définition plus précise des contours de contenus déjà connus des élèves (le méta peut être impliqué ici),

3- un changement de niveau d'utilisation d'anciennes connaissances.

Les éléments du discours qui nous intéressent ici peuvent jouer le rôle d'explications de l'utilisation d'un objet, ils peuvent répondre à un "comment" par rapport à une action, à un "pourquoi" par rapport à une affirmation (ou à une utilisation de connaissances). Ils peuvent aussi impliquer une application dont la formulation laisse entendre qu'il y a ou qu'il pourrait y avoir une demande de "pourquoi" ou de "comment".

Les interventions des élèves associées au discours d'argumentation peuvent être objet d'institutionnalisation par l'enseignant pour confirmer les élèves dans leur argumentation. Des éléments de connaissances propres à l'enseignant peuvent donc apparaître implicitement.

Nous attribuerons à cet aspect du discours la fonction « argumentation ».

Nous pensons qu'observer cet aspect du discours nous permettra de mettre en évidence les moments et lieux où l'enseignant attend des élèves une mise en application des connaissances acquises ou à venir plus approfondie que la "simple" technique. En particulier, cet aspect nous montrera les moments où l'enseignant pose des jalons pour que les élèves puissent accéder à un autre niveau de mise en fonctionnement de leurs connaissances et ceux où il estime que les niveaux acquis sont suffisants. Ici, les questions de l'enseignant aux élèves seront importantes.

Nous espérons, à l'aide de cette reconstitution partielle de la fonction d'argumentation que l'enseignant donne à ses propos, nous aménager un accès plus aisé à ses connaissances. Nous espérons pouvoir reconnaître le jeu de l'enseignant : adapte-t-il ses connaissances à la classe ou adopte-t-il le point de vue et le niveau de la classe. Si l'enseignant adapte ses connaissances alors nous pourrons dire qu'il met en jeu certaines de ses connaissances de niveau (n+p), sinon nous pourrons dire qu'il a tendance à ne pas se servir de telles connaissances.

Nous voulons donc classer sous la qualification argumentation toutes les parties du discours qui nécessitent ou qui exposent l'utilisation non technique, la transformation d'un élément mathématique.

Dans l'ensemble, le discours d'argumentation de l'enseignant doit conduire l'élève à répondre à un « comment » par rapport à une action, à un « pourquoi » par rapport au dire. Les élèves peuvent se poser la question : quelle justifications mathématiques peut-on apporter à ce que nous faisons, a-t-on le « droit » de faire... ?

Les termes réflexion, recherche, nouveau, anticipation, discours d'ouverture pourraient également qualifier cette fonction.

Pour cette fonction, nous avons ainsi déterminé trois catégories d'interventions :

- les interventions où il s'agit de définir ce qui va être appliqué, où il s'agit de mettre en relation un objet connu des élèves et une situation sans explications spécifiques (AC),
- les interventions où il faut expliquer ou conjecturer (AP),
- les interventions qui explicitent des méthodes (AM).

*définitions des sous-catégories et exemples*

*Les interventions classées "AC"*

Nous voulons isoler ici toutes les parties du discours qui conduisent à faire apparaître un élément connu des élèves. En termes de niveau de fonctionnement, tout se passe comme si l'enseignant considérait que celui de l'élément en question (outil ou objet) ne doit plus être technique mais doit s'approcher du niveau mobilisable, voire disponible. Un changement est attendu notamment en termes de mises en relation "automatique" de plusieurs données. Il s'agira de quelque chose de plus approfondi qu'une simple application, une adaptation, une ouverture (non indiquée). Nous aurons deux cas de figures.

* Premier cas : l'intervention de l'enseignant peut introduire une réponse à la question « comment faire, que faut-il utiliser pour obtenir tel résultat ? ».

- Un problème précis et bien délimité est posé, il s'agit alors de savoir quel outil est à appliquer, sans explications quant au pourquoi ou à la façon dont il faut appliquer l'outil.

- L'enseignant attend des élèves une réponse. La réponse est connue. Pour conduire les élèves à sa découverte, l'enseignant explicite une partie de la situation, il donne des indications. Les explicitations permettent de préparer la réponse en la rendant plus "visible" ou "lisible" des élèves.

* Deuxième cas : un élément mathématique est cité (outil, objet, registre...), l'objet de l'intervention porte sur le résultat de l'effet de cet élément (ayant ou non subi une transformation par un calcul par exemple). L'intervention pourrait être remplacée par la question « à quoi 'ça' sert ? » ou « pour quoi 'ça' sert ? ».

Exemple :

- illustrant : "à quoi ça sert, pour quoi ?"

« alors le côté adjacent on s'en sert pour quoi ? »

- illustrant : "comment faire, que faut-il utiliser pour...?"

« comment est-ce qu'on avait introduit le cosinus l'an dernier ? »

Autre exemple :

« Le sinus de l'angle DEA c'est deux tiers. Est-ce qu'on va pouvoir maintenant trouver l'angle DEA ?

qu'est ce qu'il nous faut ? »

*Les interventions classées "AP"*

- Nous retiendrons sous cette étiquette toutes les justifications, explicitations, explications de résultat annoncé, données par l'enseignant, faites à l'aide d'un élément mathématique.

Exemple :

« le cosinus est un nombre positif

puisqu'on a dit que c'était le rapport de deux longueurs »

- Nous sélectionnerons aussi les demandes de justifications, d'explications d'un résultat énoncé,

Exemple :

« le cosinus est plus petit que un
pourquoi ? »

- De même, nous retiendrons les demandes de conjectures ou de constatations,

Exemple :

« alors qu'est ce que vous remarquez entre ce qu'on a écrit avec l'angle B et sur ce qu'on est en train d'écrire avec l'angle C ? »

Autre exemple :

« Alors une fois qu'on a cet angle-là est ce qu'on peut connaître d'autres choses dans le triangle ? »

*Les interventions classées "méthode" (AM)*

Nous trouverons ici les situations suivantes :

- Une question est posée, sa résolution nécessite la mise en oeuvre de plusieurs éléments, elle nécessite de choisir le ou les objets mathématiques qui seront utiles à la résolution, elle nécessite de faire particulièrement attention à leurs conditions d'applications (les objets sont connus ; ce n'est pas une conjecture) : les élèves sont appelés à faire attention au "comment" ainsi qu'au "pourquoi".

Exemple :

« on travaille dans un triangle ADE, rectangle en A, on connaît AD, on connaît DE et on voudrait connaître la mesure DEA donc l'angle DEA c'est celui-là, habituez-vous à faire des triangles qui ne suivent pas les carreaux, les lignes hein parce qu'en fait

c'est souvent qu'on vous en donne inclinés des triangles rectangles. Alors la mesure de l'angle DEA je vous précise quand même au degré près on verra que ça tombe peut être pas juste en général un angle on le donne au degré près parce que c'est pas très intéressant de le donner au dixième de degré, parce qu'on sait pas trop ce que c'est hein.
alors comment est ce qu'on va faire ? »

- les passages qui comportent des descriptions de stratégie d'action,

Exemple :

« eh oui, ça dépend des calculatrices, pour certaines calculatrices il faut d'abord écrire la fonction qu'on utilise
c'est-à-dire pour certaines calculatrices, on écrira d'abord sinus et puis après faudra faire deux divisé par trois et ça affiche le résultat mais la plupart des calculatrices que vous avez (bruit) Texas Instrument là en général vous avez des Casio assez simples, c'est pas la peine d'avoir (bruit) vraiment perfectionnées, sur ces calculatrices-là vous êtes obligés d'abord d'écrire deux divisé par trois »

### ii- Fonction structuration

Le professeur peut tenter de transmettre du nouveau au niveau de mises en relation entre des connaissances installées. Notre réflexion suggère que le professeur pense qu'en plaçant les élèves à ce niveau ils vont élaborer quelque chose de nouveau qui n'est pas directement identifiable à un "contenu" précis d'enseignement tel que sous-entendu par le discours d'argumentation. Cet aspect de la médiation nous semble particulier et intéressant à prendre en compte. Nous le repérerons par la fonction de « structuration ».

Nous voyons dans la fonction de structuration un procédé permettant de lier plusieurs résultats et connaissances afin d'en annoncer ou d'en produire de nouveaux. Elle nécessite par exemple de savoir "quand" des connaissances en place peuvent ne plus rester isolées ou ne plus être utilisées uniquement de façon technique et donner lieu à des enchaînements avec d'autres connaissances.

C'est un élément qui bien souvent n'est pas traité comme un objet d'enseignement, son apprentissage est souvent laissé à la charge des élèves, dehors de la classe. C. Hache et A. Robert (1998) ont constaté que la structuration en classe est souvent totalement prise en charge par l'enseignant. L'absence de questionnement (de l'enseignant aux élèves) de type "structuration" peut vouloir dire que l'enseignant estime que les connaissances des élèves sont suffisantes (même si parfois elles ne le sont pas) pour donner lieu à des enchaînements avec d'autres connaissances et progresser, ou encore qu'il n'y a pas pensé. Réciproquement si cela a lieu, cela peut marquer une certaine distance "anticipatrice" de l'enseignant. Quand il s'agit de structurer les connaissances entre elles (institutionnalisation, application spécifique d'un résultat, résolution de problème...), l'enseignant peut "en profiter" de façon particulière pour insister sur un point dont il espère que l'effet sera de mettre en évidence un passage précis. Pour pouvoir agir de la sorte, il lui est nécessaire de connaître l'environnement du point en question et ses liens avec ce qui est en train de se faire. D'ailleurs cette même connaissance est requise pour les passages qui ne sont pas particulièrement mis en évidence. C'est-à-dire qu'il est souvent nécessaire que l'enseignant puisse mettre en oeuvre des connaissances de niveau (n+p) pour contribuer à la construction de connaissances de niveau (n).

Nous classerons dans cette catégorie toutes les parties du discours qui indiquent (ou semblent indiquer) la ponctuation entre les différentes tâches d'une activité, qui précisent l'enchaînement entre plusieurs activités de mathématiques institutionnalisées. Nous y classerons toutes les phrases qui se substituent à une action sur un contenu. En particulier, nous repérerons par cette fonction les phrases qui peuvent sembler insuffisamment développées pour que le contenu soit accessible aux élèves. Ce "non-développement" peut donner l'impression (notamment aux élèves) que le *moment* est venu de faire ce qui est précisé parce que *c'est ainsi...* et qu'il n'y a pas de raison mathématique particulière (et/ou accessible aux élèves) qui conduise à cette action. Il s'agit en quelque sorte d'une action qui peut sembler détachée de tout contenu mathématique mais qui précise un enchaînement[25] (même si celui ci n'est pas clair).

---

[25] *Exemple* :

Un exercice est en cours de résolution, pour sa résolution des calculs littéraux ont été entrepris. Les résultats obtenus font intervenir des mesures de segments. Les mesures de segments sont indiquées à l'aide de lettres précisant les extrémités des segments (exemple AB pour la mesure du segment [AB]). L'énoncé de l'exercice faisait intervenir un paramètre « a » représentant la mesure d'un des segments en jeu. D'autres calculs pourraient compléter ceux entrepris mais l'expression déjà obtenue peut être "allégée" en l'écrivant en fonction du paramètre « a », ceci pouvant faciliter la décontextualisation à venir de la formule qui sera

Afin de repérer le discours de structuration, nous avons ainsi distingué trois catégories :

- structuration bilan (SB),
- structuration étape (SE),
- structuration rédaction (SR).

Nous espérons ici pouvoir apprécier ce que l'enseignant attend que les élèves sachent faire. Nous espérons aussi pouvoir estimer si l'enseignant adapte ses connaissances de sorte à conduire les élèves à tenir des propos de structuration ou de sorte à "récupérer" et à "profiter" des moments où les élèves font apparaître dans leurs propos des points de structuration.

*Définitions des sous-catégories et exemples*

*Structuration bilan (SB)*

L'intervention joue explicitement le rôle d'un rappel :

- rappel de qui a été fait lors d'une séance précédent celle observée,
- rappel de ce qui a été fait dans la même séance mais qui ne précède pas immédiatement ce qui est train d'être fait,
- rappel de ce qui a été fait une année précédente, et qui peut être nécessaire à la poursuite du cours, sous forme de titre ou d'appel explicite à la mémoire.

Exemple :

« donc de la trigonométrie on en a déjà fait dans le triangle rectangle »

« on avait vu ça l'année dernière que c'était entre zéro et un ? »

« pourquoi est ce qu'on s'en (le cosinus) était servi l'année dernière ? »

---

trouvée. A ce moment de la résolution, l'enseignant dit simplement sans développement ni explication : « donc ensuite on remplace ».
Pour cet exemple, l'action substituée par « ensuite on remplace » correspond à un début de décontextualisation de la relation qui va être produite. La décontextualisation est ensuite implicitement institutionnalisée par l'enseignant. Une partie de la suite de la séance montre que certains élèves n'avaient pas remarqué la décontextualisation. Ce lien entre l'exercice et l'aspect général du résultat leur a échappé dans le discours de l'enseignant.

L'intervention annonce quelque chose qui pourra être fait dans l'immédiat ou plus tard :

- dans le cours,
- dans l'année,
- au cours du cursus scolaire à venir,

sous forme de titre ou de façon plus développée.

Exemple :

« donc finalement dans le triangle rectangle on va voir trois définitions, celle du cosinus que vous connaissez que vous allez me rappeler, celle du sinus et celle de la tangente. »

« la trigonométrie cette année, on la verra que dans le triangle rectangle »

L'intervention indique, résume quelque chose qui vient d'être fait :

Exemple :

« alors on a parlé du cosinus, du sinus et de la tangente de l'angle B »

*Structuration étape (SE)*

Les interventions des enseignants seront classées sous cette rubrique dans les situations suivantes :

- "rien n'a été dit" ou "il reste à dire", ce qui a été dit n'est que partiel et il reste à faire pour finir l'activité. L'enseignant dit ce qu'il faut faire (sans expliquer pourquoi) en donnant ainsi l'étape suivante nécessaire à la poursuite de l'activité en cours,
- une tâche est en cours de résolution, l'enseignant indique sous forme de titre ce qui va être fait dans l'immédiat. Ce titre ne correspond qu'à une des différentes étapes que nécessitera la résolution,
- ce qui va être traité et qui n'est qu'une partie d'un tout.

Exemple :

« on va commencer par un petit rappel sur le triangle, sur le vocabulaire qu'on utilise dans le triangle rectangle »

Nous classerons aussi sous cette étiquette certaines formes d'aide au raisonnement (pour les élèves). Ces parties ne porteront pas toujours sur des éléments directement liés à un contenu mathématique mais nous considérons que par leur caractère spécifique d'aide au raisonnement, elles peuvent être intéressantes à relever.

Nous aurons ainsi les interventions qui :

- précisent (explicitement ou non) les éléments qui peuvent être essentiels ou d'une grande aide au raisonnement,
- indiquent (explicitement ou non) une méthode de travail.

Exemple :

« alors vous ne refaites pas la figure, je la rappelle juste pour qu'on voit bien »

« alors on va écrire, pour l'instant vous n'écrivez rien, on va voir »

*Structuration rédaction (SR)*

- "Tout a été dit" : un raisonnement, un calcul, une application ont été faits oralement, il n'y a plus ou pas d'explications à donner, il ne s'agit plus que de rédiger. Pour cela, l'enseignant reprend ce qui a été fait, en indique les principales étapes et éventuellement en développe certaines de nouveau.

Dans ces cas, les étapes indiquées, refaites seront classées en "structuration rédaction".

Nous y classerons aussi les phrases qui indiquent aux élèves qu'une étape est achevée et qu'il faut noter ce qui vient d'être fait.

Exemple :

« alors vous notez ça »

« alors on va noter hein on écrira la justification après ».

### iii- Fonction information

Lorsque le discours ne véhicule ni intention de structuration ni visée de transformation (d'argumentation), nous considérons qu'il peut véhiculer des éléments d'informations. C'est-à-dire qu'il peut y avoir des passages du discours ne portant que sur des connaissances déjà établies et à propos desquelles, à l'instant où elles sont abordées, le souci de l'enseignant n'est plus de les faire progresser. Il peut montrer ou dire mais son intention n'est pas d'engager les élèves dans un travail de transformation de ces connaissances.

Le discours que nous qualifions « d'information » pourra aussi prendre la forme d'appréciations, il pourra exprimer des habitudes d'écriture, de vocabulaire etc. qui introduisent un éclairage venu en général de niveaux (n+p). En effet une appréciation qualifie un événement par rapport à son environnement, à ce qu'il peut produire ou sous-entendre de signification. En général, les habitudes d'écriture ou de vocabulaire sont établies par rapport à des utilisations ultérieures des connaissances en jeu. Elles indiquent (par exemple) une exigence de rigueur. Ainsi cette fonction pourra être attribuée à des passages qui font apparaître des propos non obligatoirement mathématiques, liés à ce que les élèves font. Nous pourrons voir ces passages comme des commentaires (directs ou indirects) que l'enseignant formule en fonction de ce qu'il considère être attendu des élèves.

Nous isolerons sous le titre information le discours de l'enseignant dont le contenu répond à l'une des caractéristiques suivantes :

- le contenu mathématique de l'intervention est connu des élèves, il est ancien pour eux et il n'y a pas à son propos nécessité d'apport de connaissances nouvelles de la part de l'enseignant. Le contenu en question porte sur des textes institutionnalisés (décontextualisés ou non), il ne peut y avoir à leurs propos que des demandes de mises en fonctionnement technique. Ces passages permettent de caractériser des moments (plus ou moins ponctuels) où l'enseignant avec la classe redéfinit, rappelle, recadre ce qui est attendu des éléments de savoir ou activités en cours,

- le contenu mathématique est très récent pour les élèves, l'enseignant ne leur demande qu'une connaissance technique du contenu abordé (vocabulaire ou utilisation simple et isolée d'une règle). Ce discours pourra être entendu comme un entraînement à l'utilisation des connaissances récentes ou comme une familiarisation à ces nouvelles connaissances. Nous ne ferons pas de distinction, qu'il s'agisse de "stabiliser définitivement" (i.e. d'acquérir définitivement pour l'année en cours et par rapport au niveau (n) attendu des élèves) ou qu'il s'agisse de renforcer une "mise en place" passagère aux fins de constructions ultérieures. Précisons encore, toujours concernant les connaissances récentes, que nous ne retiendrons ici que les passages qui n'apportent rien de nouveau, rien comme mathématiques nouvelles à leur propos.

- Dans le discours, il peut y avoir un aspect mathématique nouveau par rapport à ce que les élèves connaissent, qui est implicite mais qui ne leur est pas destiné et qui ne peut pas leur être demandé. Nous identifierons aussi à l'aide de la fonction « information » les passages où il est possible de reconnaître des apports mathématiques implicites mais que les élèves ne sont pas supposés maîtriser ou qui pourraient donner lieu à des développements mathématiques que l'enseignant ne fait pas (de façon volontaire) ou qu'il ne fait qu'en partie sans aucune justification.

Excepté ce dernier point, d'un point de vue élève, le discours d'information correspond à une évocation "simple" et isolée (décomposée) des connaissances, il porte sur un contenu sans le modifier, il porte sur de l'ancien, sur du très récent, ou il pourra exprimer une appréciation sur ce qui est fait.

Ce discours pourra indiquer les connaissances des élèves dont le niveau de mise en fonctionnement est technique, les applications simples et isolées, les calculs, le "texte du savoir" (théorème, définition, propriété...).

Les validations sans commentaires des propos des élèves seront aussi repérées par la fonction information du discours.

Pour cette fonction nous aurons ainsi pour cette fonction quatre catégories :

- Information texte (IT),
- Information confirmation (IC),
- Information résultat (IA),
- Information autre et divers (ID).

Nous espérons ainsi pouvoir caractériser les niveaux (n) (voire (n - p)) et un “appel” aux niveaux (n+p) dont peut se servir l’enseignant avec la catégorie « ID ». Ce dernier point pourra aussi nous permettre d’affiner la description du jeu de l’enseignante : adopte-t-il le strict niveau des élèves, émet-il un discours ouvert sur d’autres connaissances ; en nos termes, utilise-t-il ses connaissances de niveau (n+p) ?

*Définition des sous-catégories et exemples*

*Les interventions classées “texte ”* (IT)

Nous désignons par “texte” les références explicites à un texte mathématique connu en partie ou en totalité des élèves (vocabulaire, définition, propriété, théorème...), ces références ne devront présenter pour eux qu’un appel à la mémoire.
Les parties du discours étiquetées texte pourront se présenter sous forme de questions, réponses ou accompagnements (cf. le relief du discours).

Nous pourrons trouver :

- Des demandes de définitions,

Exemple :

« ça veut dire quoi adjacent ? »

- Des identifications d’objets mathématiques,

Exemple :

« dans le triangle ABC rectangle en A, BC est l’hypoténuse »

- Des demandes explicites de textes de propriétés déjà institutionnalisées,

Exemple :

« c’est quoi le théorème de Pythagore ? »

- Des rappels de propriétés, théorèmes, définitions donnés en cours de calcul qui n'ont pas valeur de justification ou d'explication,

- Des demandes d'énoncés d'un résultat quand la demande est faite de sorte qu'il n'y ait qu'une réponse précise, cette réponse pouvant avoir valeur de rappel d'un résultat déjà établi,

Exemple :

« le cosinus était compris entre quel nombre et quel nombre ? »

- Des propriétés citées au cours de la rédaction de la solution d'un problème ou suite à la résolution orale (même si la résolution n'est que partielle) dès lors que l'objet explicité a déjà été cité (par exemple sous forme de titre), qu'il a déjà été appliqué ou que son application n'est pas l'objet principal de l'intervention. Le travail mathématique a été fait en amont, il ne s'agit plus que de valider mathématiquement (par la référence à un texte) la solution ou la réponse.

Exemple :

« P- comment s'appelle le côté BC ?

E- l'hypoténuse

P- l'hypoténuse

P- parce que c'est le côté le plus long »

*Les interventions classées "résultat"* (IA)

Nous classerons sous cette étiquette les phrases où l'enseignant ne sollicite des élèves qu'un aspect technique d'application des connaissances.

Nous aurons les situations suivantes :

- L'enseignant demande un résultat,

* les élèves sont supposés savoir ce qui doit être appliqué, seul le résultat compte, il n'y a pas de demande sur la façon dont le résultat est obtenu. S'il y a des explications, elles ne viendront qu'après et feront l'objet d'interventions qui leur seront spécifiquement réservées.

* les demandes de résultats numériques ou littéraux.

Exemple :

$x^2 = 25$

« x vaut combien ? »

ou bien :

« ça vaut combien HB ? »

* les connaissances mathématiques à appliquer ont été explicitées, les explications éventuelles ont été données ou viendront par la suite, il ne s'agit plus que de contextualiser et faire fonctionner les connaissances sur un point précis.

Exemple :

les formules cosinus, sinus et tangente pour un angle donné dans un triangle rectangle ont été données,

« le cosinus de l'angle B avec les différents côtés qu'on a là, qu'est ce que ça va être ? »

* il s'agit d'identifier des objets connus ou de contextualiser un terme en lui donnant un support tiré de l'activité en cours, le terme en question étant isolé, même si par la suite ce terme sera repris,

Exemple :

« alors le côté adjacent à l'angle B c'était ? »

Au contraire, on trouve aussi les identifications consistant à décontextualiser un terme :

Exemple :

« comment s'appelle le côté BC ? »

*Les interventions classées "autre"* (ou divers) (ID)

Ces informations seront celles que l'enseignant peut donner à propos du contrat, des notations, de la terminologie ainsi que celles indiquant des appréciations ou des mises en garde. Nous aurons aussi les énoncés d'exercices, de problèmes, de tâches et d'activités.

- Contrat :

* explicitation de certains points du contrat

Exemple :

« alors ces définitions, vous devez les connaître par cœur »

* commentaire sur ce qui est institutionnalisé.

- Notation, terminologie :

* fait le lien entre l'écrit et la signification mathématique des symboles, fait le lien entre l'objet mathématique et la terminologie associée. C'est un discours à caractère ostentatoire

Exemple :

« on dit a sur deux et pas a demi »

- Appréciation :

* jugement de valeur portant sur ce que les élèves font,

Exemple :

« c'est bien »

ou sur la situation

Exemple :

« alors ça c'est la méthode la plus simple »

- Mise en garde :

* met l'accent sur une erreur possible que les élèves peuvent faire, permet d'attirer l'attention sur un cadre ou de bien identifier les variables et quantités en présence.

- Autre :

* permet d'introduire des éléments mathématiques à l'aide de "moyens détournés" par rapport à l'objectif.

Exemple :

« lorsqu'on utilisait la calculatrice, vous aviez vu qu'il y avait d'autres touches »

* des passages pas assez explicites pour pouvoir être classés

Exemple :

« là j'ai pas fini de donner les étapes de la calculatrice mais j'aimerais bien que vous le fassiez tout seul ».

*Les interventions classées "confirmation"* (IC) :

Nous classerons ici les validations et invalidations strictes (oui, d'accord, voilà, non...). Nous y inclurons aussi les confirmations immédiates ou a posteriori où l'enseignant valide strictement (confirmation précédente) et répète la réponse de l'élève sous la même forme ou sous une forme équivalente. En effet, nous pensons que la répétition provoque une insistance sur le contenu de la réponse et peut ainsi lui donner de l'importance. C'est cette apparence d'importance qui nous suggère le terme "confirmation".

Des parties du discours pourront être classées sous l'une ou l'autre de ces étiquettes même si elles ne sont produites qu'après une ou deux interventions de l'enseignant, le principal étant qu'elles répondent à une intervention d'élève.

Exemple :

« P- Alors qu'est ce que vous remarquez entre ce qu'on a écrit avec l'angle B et sur ce qu'on est en train d'écrire avec l'angle C ? le sinus de l'angle B, le cosinus de l'angle B, la tangente de l'angle B et puis en dessous Le cosinus de C, le sinus de C et la tangente de C, qu'est ce qu'on remarque ? ça saute aux yeux... Caroline

E- y'a partout un truc de pareil

P- un truc de pareil, tu peux nous expliquer un petit peu mieux ?

E- ben par exemple cos B y'a BC dedans, et sinus B aussi

P- oui c'est-à-dire que BC c'est quoi BC ?

E- c'est l'hypoténuse

P- l'hypoténuse

P- <u>c'est vrai que ça ne bouge pas dans n'importe quel angle</u>. »

Ici, l'enseignant confirme l'expression "un truc de pareil" après avoir fait expliciter le terme "hypoténuse" qui est le "truc de pareil".

De même, nous considérerons qu'il ne s'agit que d'une confirmation dans les cas où l'enseignant apporte une précision qui ne fait qu'expliciter ce que disent les élèves et que l'objet principal de l'intervention est le même que celui des élèves.

Exemple :

1- le passage ci dessus,

2- il s'agit de la suite du passage ci dessus :

Exemple :

« E- oui et à côté aussi ah ben non c'est inversé

P- <u>alors là c'est inversé, les numérateurs et dénominateurs sont inversés</u>

E- oui »

L'explicitation porte sur les termes "numérateur" et "dénominateur".

### *2.1.2.3- Relief du discours*

L'animation apportée par l'enseignant est un aspect important de la vie de la classe dont nous tenons compte. En lien avec le discours, nous introduisons la notion de « relief ». Nous entendons par relief certains moyens utilisés par l'enseignant lorsqu'il intervient oralement pour s'adresser à la classe. Nous dégageons trois catégories d'interventions : celles qui peuvent être interprétées comme des questions ou des sollicitations de l'enseignant à la classe, celles qui peuvent être vues comme des réponses apportées aux élèves et les autres qui ne seront ni des réponses ni des questions et que nous qualifierons d'accompagnement. Ces distinctions faciliteront notre travail de recherche.

Poser une question peut permettre à l'enseignant de mettre en évidence un point particulier. La question pointe un élément spécifique auquel l'enseignant veut donner une certaine importance et à propos duquel il attend certaines réponses. Ces réponses attendues doivent être identifiables et reconnaissables comme étant celles induites par la demande (même si les élèves ne répondent que partiellement). La question est posée en fonction d'un certain contexte et vient à un moment donné. L'enseignant pose des questions en fonction de ce qui va être fait, de ce qui a été fait, de ce qu'il attend des élèves, de ce qu'il veut leur faire dire ou effectuer.

Ainsi, cette forme de discours peut permettre d'expliciter ou de faire expliciter une structuration, une méthode, les raisons qui ont conduit à un résultat. Cette forme est aussi révélatrice de ce qui est mis du côté des élèves. Nous estimons donc que par les questions qu'il pose, l'enseignant montre une partie des connaissances qu'il attend des élèves et cela indique en partie la façon dont il s'adapte à eux. Par conséquent, en posant des questions l'enseignant montre une partie de ses propres connaissances qu'il met en jeu.

Les réponses peuvent donner lieu à des développements imprévus (surtout avec les questions d'élèves) et nécessiter des improvisations de la part de l'enseignant. Ces moments pourront nous permettre de mesurer une autre forme de l'adaptation que l'enseignant fait de ses connaissances "sur le vif" à propos des notions abordées.

Nous considérons enfin les accompagnements comme des compléments d'information ou des introductions à de nouvelles connaissances. Ils peuvent aussi servir de rappels. Ils permettent donc de voir en complément aux questions ce qui n'est pas à la charge des élèves ou ne l'est que partiellement. Quand l'enseignant considère qu'il faut dire quelque chose, c'est qu'il accorde de l'importance à la chose dite. Cette importance peut être révélatrice à la fois de la vision locale qu'il a de la classe et aussi d'une vision plus globale de l'objet sur lequel porte ce qui est dit. C'est encore une forme "d'aménagement" des connaissances que l'enseignant prend à sa charge (la dernière que nous regarderons).

*définitions*

*Questions*

Nous retiendrons comme questions uniquement les parties du discours qui portent sur des contenus mathématiques. Les questions permettant de mesurer le suivi de la compréhension des élèves ou de l'attention des élèves ne seront pas comptées.

Nous retiendrons :

- les parties qui sont entendues par les élèves comme des demandes auxquelles ils répondent,

- les parties qui appellent par leur forme ou leur contenu, une réponse donnée ou non par les élèves, attendue ou non par l'enseignant. La réponse pouvant ne pas être donnée dès la question posée, c'est-à-dire ne pas suivre directement la question,

*Réponses*

Nous retiendrons :

- les contenus stricts des réponses aux questions définies ci-dessus posées par l'enseignant,

- les contenus formulés par l'enseignant suite à une question d'élève et qui correspondent strictement à la question.

Toute partie supplémentaire, tout élément de complément est exclu de la définition que nous formulons de la réponse.

Seront également considérées comme réponses les répétitions de réponses faisant apparaître un terme équivalent à un de ceux utilisés pour la première réponse sans que ce changement ne serve à l'enseignant à autre chose (a sur deux, un demi de a...).

*Accompagnements*

Nous considérerons toutes les parties du discours qui ne répondent ni à la définition d'une question (ci-dessus précisée), ni à la définition d'une réponse (ci-dessus précisée) comme des accompagnements.

Ainsi, nous trouverons :

- les développements de réponse avec apport d'information,

- les compléments d'information sur une réponse : l'enseignant estime que la réponse stricte est insuffisante, qu'il est important de préciser, rappeler, résumer, donner des explications supplémentaires, développer un point, commenter un terme...,

- les incitations et encouragement à répondre,

- les éléments indicatifs censés permettre aux élèves de répondre à une question posée (si vous regardez le rapport-là...)

- ce qui pourrait être la réponse à une question non posée,

- les mises au point quand elles sont à contenu mathématique (qui correspondent à : où en sommes-nous, que faisons-nous, que savons-nous...).

### 2.1.3- L'exclusion des réponses "IC"

Les transcriptions présentent l'ensemble des échanges intervenus entre les élèves et leurs enseignants de mathématiques.

La condition retenue pour que soient attribués une forme, une fonction et un relief aux interventions des enseignants est que leurs sujets portent sur des mathématiques. Ainsi en est-il des confirmations apportées aux propos des élèves répondant aux questions des enseignants. En général, nous avons attribué à ces confirmations la fonction "IC" et le relief "réponse". Quelques unités de discours des professeurs répondant à des propos que les élèves ont formulé sans avoir été sollicités ont également été classés "IC" "réponse". Nous pouvons envisager deux situations pour ces dernières réponses :

- l'enseignant tient compte des propos des élèves et leur apporte un développement,

- l'enseignant limite sa reconnaissance des propos des élèves à l'expression d'une confirmation sans autre développement, auquel cas nous considérons qu'il estime inutile pour le reste de la classe d'exploiter ce qui a été exprimé.

En conclusion, nous estimons que les réponses "IC" font écho à des propos dont l'objet est mentionné en amont ou en aval du discours de l'enseignant ou encore dont l'objet est écarté par l'enseignant.

Par conséquent, deux cas de figure se présentent :

- l'objet est mentionné ailleurs ; il est alors repéré par une autre fonction du discours ainsi qu'une forme,

- l'objet n'est mentionné nul part ; tout se passe comme si l'enseignant ne voulait pas lui donner d'importance.

Pour ces deux raisons, nous exclurons la catégorie "réponse IC" des totaux des tableaux de contingence, elle apparaîtra entre parenthèses dans chacun des tableaux que nous dresserons.

### *2.2- Prise en compte du manuel*

## 2.2.1- Pourquoi prendre en compte le manuel ?

### *2.2.1.1- Une utilisation courante*

Le manuel est un élément présent dans l'univers scolaire ainsi que dans le système didactique. Il est à disposition de tous, en particulier à disposition des enseignants et des élèves. Il peut constituer un trait d'union matériel et "neutre" entre l'enseignant et les élèves. Mais il est aussi une des traces des différentes productions de la "noosphère". Il peut être considéré comme un texte de savoir et de ce fait comme un représentant pseudo-officiel du savoir du secondaire[26]. Nous admettons d'ailleurs que les manuels peuvent – comme outils – constituer des aides de cours aux enseignants, qu'ils peuvent être une partie de leurs références[27]. Cependant, nous formulons l'hypothèse qu'il est tout à fait possible qu'un enseignant prépare un cours sans utiliser de manuel(s) (étant entendu que préparer le cours signifie autant concevoir des exercices qu'élaborer des parties qui ne sont pas des exercices). Mais évidemment, nous acceptons que cela puisse être fastidieux, long, peut-être lourd, voire que cela puisse présenter une perte de temps. L'utilisation du manuel comme outil semble plus raisonnable, plusieurs manuels permettent même de couvrir une certaine variété des possibles pouvant paraître satisfaisante. Notre étude (très réduite) de quelques manuels (cf. annexe) nous a montré des imprécisions, des omissions, des décontextualisations non effectuées, des informations pouvant être complétées, que

[26] Nous remarquons un flou autour des manuels. En effets, certains donnent des conseils aux enseignants pour leur utilisation mais rédigent le contenu en considérant le lecteur comme un élève. D'autres n'indiquent rien de particulier. De plus, les programmes officiels ne mentionnent l'utilisation des manuels ni pour les élèves ni pour les enseignants alors qu'ils mentionnent l'utilisation de la calculatrice pour les élèves.

[27] L. Coulange (1997-1998) nous fournit une confirmation. Pour une recherche, l'auteur a étudié deux ouvrage de classe de Seconde des lycées et a soumis un questionnaire à des professeurs enseignant en classe de Seconde. Le résultat du questionnaire révèle que la majorité des enseignants ayant répondu (L. Coulange parle de 21 réponses) utilise les deux ouvrages. La partie « cours » des deux manuels est consultée par 71% d'entre eux, la partie « exercices » par 80,9% et 76,2% d'entre les enseignants pour l'un et l'autre ouvrages.

l'enseignant peut ou non remarquer. Une lecture des manuels, utilisés comme outils, peut être interprétée comme une décomposition critique de leurs contenus, décomposition constituant une base non exhaustive à partir de laquelle sera recomposé un texte de savoir enrichi d'autres éléments. Nous estimons donc que l'utilisation de plusieurs sources peut demander à l'enseignant de les considérer en fonction de ses connaissances (pour les trier, les prouver, les adapter...), et par suite demande à l'enseignant de faire fonctionner ces dernières. L'anticipation côté "élèves" peut entraîner l'enseignant à essayer d'imaginer les questions et réactions auxquelles il pourrait être confronté et qui ne sont pas prévues dans les manuels[28]. Pour cela, il est utile qu'il puisse imaginer des conséquences possibles en termes mathématiques que les nouveaux points abordés entraîneront chez l'élève par suite, les questions qui pourront émerger.
Ainsi notre hypothèse est qu'une certaine distance au manuel nécessite de la part de l'enseignant la constitution d'un texte de savoir qui lui est propre, qui tient compte de ses connaissances et des situations qu'il rencontrera en classe. De la sorte, admettre l'utilisation du (des) manuel(s) comme outil pour concevoir les cours nous renvoie à la question que nous nous posons du repérage de la disponibilité des connaissances mathématiques de l'enseignant. Nous pensons donc par le biais de la comparaison du discours au texte du manuel pouvoir en dégager une certaine estimation.

#### *2.2.1.2- Des constats*

Au cours de leurs recherches, plusieurs auteurs se sont penchés sur les manuels. Nous précisons certains résultats, de fait ils impliquent, conjointement aux manuels, les programmes, les enseignants ou les élèves.
Une analyse curriculaire associée à l'étude de certains manuels scolaire de la classe de Troisième permet à T. Assude (1993-1994) de conclure à un phénomène d'arrêt de la transposition didactique sur l'objet « fonction » dont une conséquence est de pas voir l'objet « racine carrée » comme la fonction racine carrée. Tel qu'il est actuellement abordé en classe de Troisième,

[28] Nous retrouvons ici le rôle que peut jouer l'expérience d'un ancien enseignant. Quelles possibilités s'offrent à un débutant ? Est-il avantagé : grâce à ses propres connaissances, il peut imaginer plusieurs possibilités non "typiques" de réactions d'élèves, ou au contraire, la méconnaissance des réactions d'élèves le défavorise ? Un enseignant expérimenté "connaît" un certain nombre de réactions d'élèves, quelle place occupent alors les connaissances propres ?

l'objet « racine carrée » engendre des problèmes chez les élèves. Si la racine carrée était vue comme une fonction, ces problèmes pourraient être abordés différemment puisqu'ils seraient plus "généraux" en étant communs à d'autres objets. L'auteur caractérise les problèmes rencontrés par les élèves par trois thèmes : irrationalité, approximations numériques et manipulation opératoire des radicaux. Ces thèmes non spécifiques de la racine carrée, apparaissent ensemble pour la première fois en classe de Troisième "grâce" à la racine carrée. T. Assude note bien que la « racine carrée » est le premier objet à apparaître dans l'enseignement permettant de travailler les thèmes énoncés et montre, en considérant les programmes actuels, qu'aucun de ces thèmes ne peut être approché par la racine carrée[29] qui n'a finalement pas le statut de nombre en Troisième.

Doit-on conclure à une insuffisance des programmes, à une introduction inutile de la racine carrée en classe de Troisième ou seulement à la volonté d'approcher une classe de nouveaux problèmes à l'aide de la racine carrée, nouveaux problèmes qui seront développés dans des classes ultérieures ?

Face à ces questions, que font les enseignants, comment utilisent-ils leurs connaissances ?

Poursuivant l'objectif de « caractériser les rapports que les enseignants nouent dans les classes de Troisième et de Seconde avec les objets nombres réels et racine carrée » et suite à une étude de plusieurs manuels, A. Bronner (1997) parvient à remarquer :

- un « vide didactique institutionnel » à propos de la négociation du passage des décimaux ou des irrationnels aux nombres réels,

[29] Thème 1 : l'irrationalité
Le thème de l'irrationalité est motivé par le "confort" qu'apporte le travail dans un espace complet « au lycée et au collège, il faut travailler avec un système de nombres comportant suffisamment de nombres de manière à ce que certaines propriétés soient vraies (par exemple la continuité) ».
Le programme de la classe de Troisième ne retient pas l'étude de ce thème. Dans ce cas, l'auteur précise que les élèves ne peuvent pas disposer de moyens techniques pour l'aborder dans une classe de problèmes. L'irrationalité revêt alors un côté mystérieux et les élèves n'ont pas les moyens de savoir que ces nombres existent.
La racine carrée est un représentant de l'irrationalité mais elle est isolée du système de nombres qu'elle contribue à représenter. Avec la racine carrée le thème 1 est abordé sans être un objet d'étude. La "nature" de la racine carrée d'un nombre ne peut pas être explicitée, elle reste un objet particulier.
Thème 2 : approximation numérique
Les élèves disposent de la calculatrice pour approcher par des nombres décimaux les racines carrées de nombres non carrés. La racine carrée ainsi "livrée" à la calculatrice, les élèves ne "voient" pas comment les valeurs qu'elles donnent "s'approchent" de la racine recherchée. T. Assude conclut donc que les racines carrées n'ont pas le statut de nombre pour les élèves de Troisième.
Thème 3 : les manipulations opératoires
Les manipulations effectuées sur les racines ont pour objectif une certaine simplification. Or avec la calculatrice, il n'y a pas de raison de privilégier une forme à une autre ($(\sqrt{2})/2$ n'a pas plus de sens que $1/\sqrt{2}$). Ce thème ne suffit pas (non plus) à donner un statut à l'objet « racine carrée » puisqu'il n'a pas de raisons particulière d'être.

- des initiatives de réduction de ce vide prises par les auteurs de manuels,

- de forts liens entre EMS[30], les enseignants et les manuels[31].

A. Bronner conclut que le « vide didactique institutionnel » permet « un espace de position très ouvert pour l'enseignant (et) des distances entre les différents rapports institutionnels des enseignants parfois grands ».

Au-delà des contenus spécifiques, nous pouvons considérer qu'un vide didactique institutionnel est susceptible d'exister dès qu'un arrêt de la transposition didactique a lieu sur un objet auquel des points d'un programme peuvent être reliés. L'objet fonction n'est pas au programme de la classe de Troisième mais la racine carrée peut lui être associée : d'un point de vue didactique que propose l'institution autour de la racine carrée ? Y a-t-il un vide didactique institutionnel ? Nous transposons la question sur le terrain des enseignants : en cas de vide didactique institutionnel que font-ils ? A. Bronner nous indique qu'ils le comblent de façon très diverse. Nous rejoignons ici notre propos, les enseignants impliquent-ils leurs connaissances pour combler ce vide, lesquelles impliquent-ils et comment les impliquent-ils en présence des élèves ?

Ce « vide didactique institutionnel » était remarqué en d'autres termes par A. Bessot et Le Thi Hoai An (1994-1995) « les exercices de mathématiques ne sont finalisés à ce niveau (classe de Troisième) que par les attentes de l'enseignant perçues par l'élève : par exemple la simplification d'expressions comportant des racines carrées, c'est obtenir une réponse de la forme $X\sqrt{b}$. Pourquoi l'élève doit-il apprendre à répondre ainsi et pas autrement ? Seul l'enseignant connaît un futur mathématique où cette réponse aura une fonctionnalité » : si l'enseignant détient une partie du sens de la racine carrée conduit-il les élèves à entamer sa construction et comment le fait-il ? Implique-t-il d'autres connaissances que celles exposées ?

E. Roditi (1996) précise à propos de la racine carrée que les manuels ne prennent pas en compte les difficultés d'apprentissage des élèves et que la question du sens n'est pas suffisamment posée. Ainsi, l'utilité de certains enseignements est peu développée et les règles de calculs « correspondent à une algèbre inconnue des élèves ». Ce constat établi, l'auteur expose

[30] EMS : l'auteur désigne par ces trois lettres l'Enseignement Mathématique Secondaire

[31] « Les enseignants de EMS prennent un certain recul par rapport aux propositions des manuels (mais) ils restent assujettis à une institution plus large que l'institution EMS, et qui se constitue à partir de EMS et des pratiques engendrées par les manuels ».

« une activité qui permette de construire une utilité aux écritures comprenant des radicaux et une utilité aux égalités telles que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ »[32].

A. Bronner constatait des initiatives de réduction du vide didactique institutionnel, E. Roditi constate ce vide même au niveau des manuels et propose une direction pour le combler.

Nous citerons enfin M. Bittar (1999-2000) qui montre en analysant des manuels de classe de Quatrième, Troisième et Seconde qu'une insuffisance dans les manuels provoque des problèmes chez les élèves. Cette analyse est étayée par une expérience menée auprès d'élèves de Seconde. L'insuffisance dans les manuels consiste en une présentation partielle[33] de l'objet « vecteur » qui conduit à une utilisation spécifique (notamment chez les élèves) de l'objet, le rendant non indispensable. En effet, M. Bittar conclut suite à l'expérience que « l'outil vectoriel s'est montré *disponible* pour 13 élèves (sur 33) (et que) du point de vue de l'*efficacité*[34],... les élèves ont des difficultés à utiliser cet outil pour résoudre un problème » : il y a ressemblance entre l'approche adoptée par le manuel et les connaissances des élèves. Devons-nous conclure que les enseignants des élèves participant à l'expérience ont eux-mêmes adopté l'approche du manuel ? Nous retrouvons ici aussi notre questionnement, comment les enseignants ont-ils utilisé leurs connaissances ?

L'arrêt de la transposition didactique et le vide institutionnel caractérisent essentiellement les programmes officiels dont l'objectif est de préciser les connaissances exigibles des élèves. Si nous considérons que les manuels reflètent les programmes et qu'ils sont principalement destinés aux élèves, nous risquons d'y trouver les mêmes caractéristiques. Nous voyons ici un des rôles possibles des enseignants : faire intervenir leurs connaissances, connaissances que les élèves ne possèdent pas, qui ne figurent pas dans les manuels, qui ne sont pas aux programmes dans l'objectif (partiel) de favoriser les constructions attendues des élèves pour l'année et le niveau considérés, constructions liées aux connaissances non exigibles des élèves. Un autre aspect de cet

[32] Cette activité repose sur des figures et leurs agrandissements. Par exemple, une composition de deux agrandissements permet aux élèves de constater les effets (identiques) d'un produit de racines et de la racine d'un produit.

[33] L'insuffisance repose sur les points suivants :
- Définition incomplète du vecteur
- Le parallélogramme est utilisé pour aborder l'égalité de deux représentants. Il n'est pas mentionné d'ensemble des représentants (ce qui ne permet pas d'approcher la notion de classe d'équivalence). L'attention des élèves n'est pas (suffisamment) attirée sur l'indépendance qu'il y a entre les coordonnées d'un vecteur et sa position dans le plan.
- La notion de décomposition d'un vecteur suivant une base est utilisée comme propriété de "dessin", elle n'est pas mise en relief.

[34] Les définitions de *disponible* et *efficace* données par M. Bittar sont les suivantes : « l'outil est *disponible* chez l'élève s'il pense à l'utiliser dans un énoncé neutre, qui ne fait pas appel explicitement à l'outil en question. L'outil est *efficace* chez l'élève s'il l'utilise à bon escient, c'est-à-dire si cet usage le conduit à la réussite ».

objectif réside dans l'approche de constructions ultérieures que les enseignants peuvent aménager pour les élèves.

D'un point de vue plus spécifique à notre propos et en rapport au niveau considéré des élèves, notre étude réduite de certains manuels (cf. annexe) nous a permis de mettre en évidence certaines omissions et imprécisions :

1- liées aux questions d'existence et d'unicité

2- liées aux questions d'ensembles (notamment la question des réciproques)

3- liées à la rigueur, à la logique...

Dans l'ensemble, un double constat émerge.

1- Certains contenus abordés par les manuels semblent isolés, voire incomplets, sans relation avec aucun autre et les connaissances correspondantes chez les élèves pourraient l'être aussi.

2- Des enseignants tentent de combler ce manque de relation.

Les auteurs cités apportent quelques exemples de connaissances plus approfondies que l'on pourrait souhaiter voir proposer pour exister dans l'univers mathématique de l'élève. Nous rejoignons donc les auteurs en interprétant en nos termes : l'enseignant peut intervenir ici, pour pallier ces manques, avec certaines connaissances de niveau (n+p) dont il dispose et dont il peut déduire des conséquences sur celles de niveau (n) en construction chez les élèves.

#### *2.2.1.3- Notre questionnement*

Les élèves ne sont pas seuls face aux manuels, plus précisément ils ne sont pas seuls face aux savoirs à construire dont des versions sont présentées dans les manuels. Les enseignants interviennent dans cette construction. On peut se demander dans quelle mesure justement les enseignants tiennent compte des manuels, s'y cantonnent ou les complètent.

On peut imaginer plusieurs choix : par exemple là ou le manuel est imprécis l'enseignant émet un discours correct, mais sans attirer l'attention des élèves sur les points délicats, et sans que cela puisse leur être redemandé. Ou bien l'enseignant suit les manuels et ignore ces questions, quitte à avoir un discours incomplet (et il peut en être conscient, mais considérer que ce n'est pas la peine, voire que ce serait dommageable, de faire autrement).

Plus généralement notre questionnement qui porte précisément sur les connaissances mathématiques utilisées par les enseignants au collège sera : débordent-elles celles qui sont exposées dans les manuels, et comment ? Sont-elles plus réduites ? Quelles initiatives, voire quelles exigences les enseignant(e)s développent-ils (elles) entre ce qui est exigé des élèves et leurs propres connaissances, bien plus développées ?

Nous ne chercherons pas dans notre travail à émettre un jugement sur ces choix, d'autant plus que nous n'en aurons qu'un faible échantillon par enseignant et un faible échantillon d'enseignants, mais bien dans un premier temps à rechercher différentes stratégies bien visibles qui coexistent dans l'enseignement à ce sujet ; un travail ultérieur devra être fait pour compléter le nôtre et en tirer des conséquences éventuelles sur les apprentissages des élèves (et la formation des enseignants).

### 2.2.2- Comment allons-nous prendre en compte le manuel ?

Nous allons comparer le discours que l'enseignant tient en classe au manuel utilisé par les élèves. Pour cela nous allons repérer dans le manuel le cours observé en comparant les titres que les enseignants précisent aux élèves aux titres des chapitres du manuel ou en choisissant le(s) chapitre(s) correspondant(s) aux exercices extraits du manuel par l'enseignant et en tenant compte des très brefs éléments dont nous avons pu nous entretenir avec les enseignants avant la séance.

Le(s) chapitre(s) étant sélectionné(s) nous établissons une première comparaison qui se veut globale et qui porte sur :

- le plan du cours des enseignants,
- les titres donnés aux différentes parties du cours,
- les contenus traités,

que nous rapprochons des mêmes éléments extraits du (des) chapitre(s) du manuel. Les résultats sont présentés dans des tableaux que nous complétons par des commentaires lorsque nous considérons les tableaux peu significatifs.

Nous procédons ensuite à une comparaison plus locale des contenus couverts par les cours des enseignants et les chapitres des manuels en essayant de développer les premiers éléments conclus de la première comparaison. En tenant compte des échanges avec la classe ainsi que de la façon dont les enseignants accompagnent les élèves dans les activités qu'ils leur proposent, nous essayons de déduire du discours :

1- ce qu'ils attendent des élèves,

2- les éléments auxquels ils accordent de l'importance (implicitement ou explicitement),

3- les non-dits, les procédures de raisonnement implicites,

4- les développements et constructions ultérieurs possibles pour les élèves,

5- les conséquences provoquées par les interventions des élèves.

Ces analyses auxquelles nous adjoindrons parfois des résultats de l'étude des passages décontextualisés seront mises en relation avec le texte du manuel. Ceci nous éclairera sur la prise en compte de ce dernier par les enseignants et sur les conséquences de cette prise en compte dans la mise en oeuvre de connaissances de niveau (n+p).

Nous constaterons aussi l'effet produit par les interventions des élèves : les enseignants répercutent-ils ces propos dans leur discours et pour quel objectif ? Obtenir des élèves qu'ils abandonnent leurs propositions pour adopter des connaissances différentes ou obtenir des élèves qu'ils conservent "la lettre" du manuel même si on peut faire autrement ?

# CHAPITRE II

# LES DISCOURS

## CHAPITRE II : Les discours

Ce chapitre constitue le premier axe de notre étude. Il est directement lié à la répartition des discours en unités. Il est composé de deux parties, la première est réservée à une étude de la répartition des unités de discours de chacune des enseignantes. La seconde partie est réservée à l'analyse des passages décontextualisés des discours. Cette analyse porte sur les détails des discours qui sont souvent très (parfois peut-être trop) développés. Nous considérons cependant que ces développements étaient utiles car nous constatons *a posteriori* une cohérence dans la façon dont les enseignantes gèrent leurs connaissances en classe. La conclusion de la deuxième partie tiendra compte des constats dressés en première partie : un point commun aux trois enseignantes apparaîtra ainsi qu'un point de divergence.

## Première partie : étude de la répartition des unités de discours.

Nous avons compté le nombre d'unités de discours déterminées pour chacune des transcriptions dont nous disposons. Nous avons dénombré les unités appartenant à chacune des catégories du discours (forme, fonction et relief) en distinguant toutes les sous-catégories que nous avons définies pour la fonction du discours. Nous avons alors constitué des tableaux pour chaque enseignante. Nous étudions successivement les résultats obtenus par enseignante. Un premier tableau récapitulatif indique le dénombrement ci-dessus mentionné. Ce premier tableau donne naissance à d'autres tableaux, plus petits, n'intéressant qu'une partie du discours. Ces derniers tableaux font l'objet de commentaires qui ne sont pas organisés de la même façon pour les trois enseignantes. Cependant, les mêmes thèmes sont abordés : les commentaires feront intervenir forme, fonction et relief du discours. Enfin, nous comparons entre eux les résultats obtenus par enseignante.

Plan :

A- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante EI

B- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E2

C- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E3

D- Comparaison des répartitions des unités des trois discours

## *A- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E1*

Nous procédons en cinq paragraphes, le premier présente le tableau récapitulatif de l'ensemble du discours. Nous y faisons figurer les trois grandes catégories : fonction, forme et relief.

Nous commenterons dans les paragraphes 2, 3 et 4 successivement le discours d'information, le discours d'argumentation et le discours de structuration.

Enfin, le cinquième et dernier paragraphe apporte une conclusion aux commentaires.

### 1- Tableau récapitulatif

*Résultats chiffrés*

Les nombres indiqués dans le tableau correspondent aux nombres d'unités répertoriées par catégorie et sous-catégorie pour la fonction du discours. Nous précisons également des totaux partiels par catégorie et sous-catégorie.

Les nombres indiqués entre parenthèses correspondant aux unités de discours classées "réponse IC" ne sont pas inclus dans les totaux.

| Fonction | | Information | | | | | Argumentation | | | | Structuration | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | T | I | A | *Tot.* | C | P | M | *Tot.* | E | R | B | *Tot.* | |
| Contextualisée | Q | 0 | 0 | 3 | 38 | *41* | 20 | 10 | 03 | *33* | 01 | 0 | 01 | *02* | **76** |
| | A | 0 | 4 | 6 | 6 | *16* | 01 | 06 | 04 | *11* | 06 | 04 | 03 | *13* | **40** |
| | R | (74) | 0 | 5 | 16 | *21* | 02 | 10 | 03 | *15* | 02 | 0 | 0 | *02* | **38** |
| | **Total** | **00** | **04** | **14** | **60** | **78** | **23** | **26** | **10** | **59** | **09** | **04** | **04** | **17** | **154** |
| Décontextualisée | Q | 0 | 7 | 3 | 0 | *10* | 0 | 0 | 01 | *01* | 0 | 0 | 0 | *0* | **11** |
| | A | 0 | 02 | 03 | 00 | *05* | 02 | 02 | 01 | *05* | 0 | 02 | 09 | *11* | **21** |
| | R | (09) | 04 | 0 | 0 | *04* | 0 | 10 | 01 | *11* | 01 | 0 | 0 | *01* | **16** |
| | **Total** | **00** | **13** | **06** | **0** | **19** | **02** | **12** | **03** | **17** | **01** | **02** | **09** | **12** | **48** |
| **TOTAL** | | **00** | **17** | **20** | **60** | **97** | **25** | **38** | **13** | **76** | **10** | **06** | **13** | **29** | **202** |

## 2- Le discours d'information

*Résultats chiffrés*

Note pour la lecture du tableau :

Nous indiquons les effectifs de chacune des sous-catégories sous la lettre N ainsi que leurs fréquences (exprimées en pourcentage) calculées par rapport à l'ensemble du discours sous le symbole %.

La colonne "ensemble du discours" présente les effectifs et fréquences d'unités par forme et relief du discours, toutes fonctions confondues.

Exemple :

Sur la première ligne du tableau, 76 signifie qu'il y a 76 unités de discours contextualisées répertoriées comme des questions. La fonction de l'une de celles-ci est indistinctement argumentation, information ou structuration.

| Fonction | | Information | | | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | | T | | I | | A | | Tot. | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contex. tualisée | Q | | | 0 | *00* | 03 | *01,5* | 38 | *18,8* | 41 | *20,3* | 76 | *37,6* |
| | A | 00 | | 04 | *03* | 06 | *03* | 06 | *03* | 16 | *07,9* | 40 | *19,8* |
| | R | (74) | | 0 | *00* | 05 | *02,5* | 16 | *07,9* | 21 | *10,4* | 38 | *18,8* |
| | **Total** | | | **04** | ***03*** | **14** | ***06,9*** | **60** | ***29,7*** | **78** | ***38,6*** | **154** | ***76,2*** |
| Décontext. | Q | | | 07 | *03,5* | 03 | *01,5* | 0 | *00* | 10 | *04,9* | 11 | *05,5* |
| | A | 00 | | 02 | *01* | 03 | *01,5* | 0 | *00* | 05 | *02,5* | 21 | *10,4* |
| | R | (09) | | 04 | *03* | 0 | *00* | 0 | *00* | 04 | *02* | 16 | *07,9* |
| | **Total** | **00** | ***00*** | **13** | ***06,4*** | **06** | ***03*** | **0** | ***00*** | **19** | ***09,4*** | **48** | ***23,8*** |
| TOTAL | | 00 | *00* | 17 | *08,4* | 20 | *10* | 60 | *29,7* | 97 | *48,0* | 202 | 100 |

Commentaire

Nous avons repéré 97 interventions d'information ce qui représente 48 % de l'ensemble du discours. Cette fonction est plus souvent présente que les deux autres, elle en constitue presque la moitié du discours. La forme contextualisée prédomine largement cette fonction qui est par conséquent très présente dans l'ensemble du discours avec une fréquence de 38,6 % ; l'enseignante y accorde donc beaucoup d'importance.

Les informations "IA" qui soulignent un aspect technique de mise en fonctionnement des connaissances sont les plus nombreuses (60 sur 97 : 62 % de toutes les informations). Elles se font essentiellement sur le mode de l'interrogation ou de l'accompagnement (38 questions, 16 accompagnements). Quelques réponses (5) sont dues à des questions d'élèves ou à des questions de l'enseignante auxquelles les élèves n'ont pas répondu. Le discours à caractère informatif est donc principalement réduit à l'aspect technique de l'utilisation des connaissances des élèves, il est principalement abordé sous forme de questions.

Nous notons 17 interventions sur le texte mathématique (IT) ce qui représente 17,5 % du discours d'information (et 08,4 % de l'ensemble du discours). Nous interprétons ces références comme des tentatives de l'enseignante de faire intervenir explicitement les connaissances des élèves : le niveau (n) auquel nous nous trouvons avec la classe est donc présent.

Les interventions d'informations diverses (I) sont au nombre de 18 (18,5 % du discours d'information). Elles rassemblent des mises en garde ainsi que des habitudes liées aux écritures ou à la terminologie. Elles montrent que les points susceptibles de poser problème aux élèves sont implicitement présents dans le discours, elles montrent de même une volonté chez l'enseignante de créer un climat mathématique rigoureux dans la classe.

La répartition des 10 questions décontextualisées nous conduit à noter que les élèves sont très peu sollicités sur ces contenus et que les sollicitations sont très spécifiques : elles sont essentiellement liées aux textes de mathématiques institutionnalisés. Nous trouvons donc une petite confirmation de notre interprétation relative au niveau (n), interprétation que nous complétons : ce niveau apparaît effectivement en classe et est désigné à l'aide des textes de références.

Nous avons enregistré 16 réponses aux élèves qui ne sont pas de "simples" confirmations de leurs propos puisqu'elles sont classées "IA". Ces réponses "IA" contextualisées semblent signifier que l'enseignante ne déborde pas des cadres très ponctuels attachés aux propos qui ont provoqué les réponses.

Quelques accompagnements confirment cet aspect du discours de l'enseignante : six accompagnements contextualisés eux aussi classés "IA".

Au terme de ce commentaire, il se dégage les impressions suivantes :

- l'enseignante accorde de l'importance à l'aspect technique du fonctionnement des connaissances,
- l'enseignante accorde de l'importance à l'aspect local (contextualisé) des connaissances,
- le niveau (n) d'enseignement est un constant souci pour l'enseignante,
- les énoncés de propriété, théorème, définition constituent les principales occasions de décontextualisation,
- les niveaux (n+p) n'interviennent peut-être qu'à l'occasion de mises en garde dans le discours d'information de l'enseignante.

### 3- Le discours d'argumentation

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Argumentation | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | | P | | M | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contex-tualisée | Q | 20 | *09,9* | 10 | *05* | 03 | *01,5* | 33 | *16,3* | 76 | *37,6* |
| | A | 01 | *00,5* | 06 | *03* | 04 | *02* | 11 | *05,4* | 40 | *19,8* |
| | R | 02 | *01* | 10 | *05* | 03 | *01,5* | 15 | *07,4* | 38 | *18,8* |
| | **Total** | **23** | ***11,4*** | **26** | ***12,9*** | **10** | ***05*** | **59** | ***29,2*** | **154** | ***76,2*** |
| Décontex-tualisée | Q | 00 | *00* | 0 | *0* | 01 | *00,5* | 01 | *00,5* | 11 | *05,4* |
| | A | 02 | *01* | 02 | *01* | 01 | *00,5* | 05 | *24,7* | 21 | *10,4* |
| | R | 00 | *00* | 10 | *05* | 01 | *00,5* | 11 | *05,4* | 16 | *07,9* |
| | **Total** | **02** | ***01*** | **12** | ***05,9*** | **03** | ***01,5*** | **17** | ***08,4*** | **48** | ***23,8*** |
| **TOTAL** | | **25** | ***12,4*** | **38** | **18,8** | **13** | ***06,4*** | **76** | ***37,6*** | **202** | ***100*** |

<u>Commentaire</u>

Nous trouvons en argumentation un total de 76 interventions qui représentent 37,6 % de l'ensemble du discours. Cette proportion n'est pas négligeable : plus du tiers des propos de l'enseignante porte sur l'argumentation. De même que pour le discours d'information, la forme contextualisée prédomine le discours d'argumentation. Ici aussi, l'aspect local des connaissances l'emporte sur l'aspect général.

Les interventions se font essentiellement sur le mode du questionnement contextualisé, les questions représentent près de la moitié de la fonction argumentation (34 sur 76 soit 44,7 %). La répartition des questions entre les différentes catégories d'argumentation peut laisser croire que l'enseignante accorde une grande importance à la mise en relation des connaissances mathématiques ponctuelles des élèves avec les situations présentées par les activités traitées. En effet, 20 questions sont des demandes de "comment" (classées AC). Le détail du discours nous montrera que l'enseignante aide beaucoup les élèves en explicitant une grande partie de ce qu'elle attend comme réponse à ces questions AC. Les fondements mathématiques sont moins souvent sollicités avec 10 questions ("AP"). Même si l'aspect méthodologique ("AM") apparaît peu avec 4 questions, il n'est pas exclu du discours de l'enseignante.

Nous émettons comme hypothèse de cette petite étude des questions que l'enseignante est plus soucieuse de vérifier que les élèves savent appliquer leurs connaissances mathématiques que de vérifier qu'ils savent pourquoi ils les appliquent, cependant ce dernier aspect n'est pas négligé. Nous retiendrons aussi que seules les mathématiques contextualisées sont questionnées.

Tout porte à croire que les élèves interviennent souvent : nous constatons 26 unités de discours classées en réponses dont 11 sont décontextualisées. Ces onze réponses décontextualisées constituent une part importante du discours d'argumentation décontextualisé (qui comporte 17 unités). Les aspects de méthode ne sont pas absents de leurs interventions puisqu'il y a 3 réponses de méthodologie (AM).

Notons les 10 réponses décontextualisées classées "AP". Nous n'avons pas relevé de questions "AP" décontextualisées. Il semble alors que ces unités correspondent à des questions posées par les élèves. Ainsi, les élèves entraîneraient l'enseignante sur ce terrain qui nécessite davantage que les autres l'implication des connaissances de niveau (n+p).

Les réponses nous conduisent à envisager deux situations :

- n'obtenant pas de réponses aux questions qu'elle pose, l'enseignante se substitue aux élèves pour y répondre d'où le nombre élevé de réponses,
- les élèves veulent connaître les raisons de ce qui est fait, les questions de l'enseignante ne leur paraissant pas suffisantes, ils en posent ou ont une attitude laissant entendre qu'ils en posent.

En confondant les deux formes (contextualisée et décontextualisée) nous constatons un nombre de questions posées sur le mode du "pourquoi" (10 questions AP) inférieur au nombre de réponses apportées sur le même mode (20 réponses AP) et nous constatons l'absence de questions décontextualisées malgré la présence de réponses contextualisées. Ces deux constats nous conduisent à opter pour la deuxième solution envisagée.

Les accompagnements sont les moins représentés, nous en avons repéré un total de 16 dont 11 contextualisés. Il semble que l'enseignante estime inutile de commenter ce que font les élèves et qu'elle en "profite" pour compléter son discours par ce moyen.

L'argumentation met en jeu les connaissances que les élèves sont en train de construire. Peu d'accompagnement liés à cette fonction et l'essentiel contextualisé tendent à confirmer une des conclusions du discours d'information : les connaissances ponctuelles de niveau (n) sont une grande préoccupation de l'enseignante et il semble qu'elle juge suffisant de les voir apparaître d'un point de vue local.

Nous retiendrons que les fondements mathématiques ainsi que les connaissances plus générales sont sollicités sur demande des élèves et sont peu commentés.

Tout se passe comme si l'enseignante faisait un exposé de ses connaissances de niveau (n) plutôt que de conduire les élèves à les construire.

## 4- le discours de structuration

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | STRUCTURATION | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | E | | R | | B | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contextualisée | Q | 01 | *00,5* | 00 | *00* | 01 | *00,5* | 02 | *01* | 76 | *27,6* |
| | A | 06 | *03* | 04 | *02* | 03 | *01,5* | 13 | *06,4* | 40 | *19,8* |
| | R | 02 | *01* | 00 | *00* | 00 | *00* | 02 | *01* | 38 | *18,8* |
| | **Total** | **09** | ***04,5*** | **04** | ***02*** | **04** | ***02*** | **17** | ***08,4*** | **154** | ***76,2*** |
| Décontextualisée | Q | 00 | *00* | 00 | *00* | 00 | *00* | 00 | *00* | 11 | *05,4* |
| | A | 00 | *00* | 02 | *01* | 09 | *04,5* | 11 | *05,4* | 21 | *10,4* |
| | R | 01 | *00,5* | 00 | *00* | 00 | *00* | 01 | *00,5* | 16 | *07,9* |
| | **Total** | **01** | ***00,5*** | **02** | ***01*** | **09** | ***04,5*** | **12** | ***05,9*** | **48** | ***23,8*** |
| **TOTAL** | | **10** | ***05*** | **06** | ***03*** | **13** | ***06,4*** | **29** | ***14,3*** | **202** | ***100*** |

<u>Commentaire</u>

Notre commentaire sera très succinct. Dans l'ensemble de la séance, l'enseignante utilise la fonction structuration en l'explicitant : nous notons 24 accompagnements répartis de façon relativement homogène entre les deux formes contextualisée et décontextualisée du discours. Les cinq autres unités montrent que les élèves sont peu sollicités (2 questions) et s'approprient rarement cette fonction (3 réponses de l'enseignante). Ici aussi, il semble que l'enseignante explicite ses connaissances de niveau (n) plutôt que de les faire construire aux élèves.

## 5- Conclusion

Cette étude nous permet de conclure que les connaissances de niveau (n) de l'enseignante sont bien présentes, que celles de niveau (n+p) apparaissent parfois implicitement surtout suite à des propos d'élèves.

Les moments où les élèves sont appelés à prendre la parole semblent se résumer à des demandes d'applications isolées ou à des reconnaissances de mises en œuvre de connaissances, l'ensemble étant très souvent contextualisé. Les explications que l'enseignante fournit semblent porter sur les opérations qui peuvent être effectuées sur les objets manipulés lors des résolutions. Tout se passe comme s'il y avait réduction au technique des connaissances demandées malgré les connaissances plus globales du professeur.

Tout se passe comme si l'enseignante "faisait des mathématiques" qui ne sont pas à destination d'élèves. C'est-à-dire qu'elle montre ce qu'elle sait faire au niveau (n) et d'un point de vue très particulier (contextualisé) : elle fait un exposé de certaines de ses connaissances plutôt que de créer une atmosphère de construction de connaissances pour les élèves. Les élèves ne sont pas appelés à être acteurs. Les autres connaissances de l'enseignante semblent alors peu disponibles, elles semblent être juste mobilisables.

## *B- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E2*

Nos commentaires sont organisés de la même façon que pour l'enseignante E1. Un premier paragraphe présente un tableau récapitulatif de l'ensemble du discours. Les trois paragraphes qui suivent abordent successivement le discours d'information, le discours d'argumentation et le discours de structuration. Une partie sera dédiée au relief du discours pour les paragraphes portant sur l'information et l'argumentation. Enfin, le cinquième paragraphe est réservé à la conclusion.

### 1- Tableau récapitulatif

*Résultats chiffrés*

Les nombres indiqués dans le tableau correspondent aux nombres d'unités répertoriées par catégorie et sous-catégorie pour la fonction du discours. Nous précisons également des totaux partiels par catégorie et sous-catégorie.

Les nombres indiqués entre parenthèses correspondant aux unités de discours classées "réponse IC" ne sont pas inclus dans les totaux.

| Fonction | | Information | | | | | Argumentation | | | | Structuration | | | | Ensemble |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | T | I | A | *Total* | C | P | M | *Total* | E | R | B | *Total* | du discours |
| Contex. | Q | 0 | 0 | 6 | 21 | *27* | 15 | 8 | 5 | *28* | 0 | 0 | 0 | *0* | *55* |
| | A | 1 | 8 | 11 | 2 | *22* | 0 | 5 | 1 | *6* | 0 | 0 | 10 | *10* | *38* |
| | R | (59) | 0 | 0 | 1 | *01* | 0 | 4 | 0 | *4* | 0 | 0 | 0 | *0* | *05* |
| | **Total** | **01** | **08** | **17** | **24** | **50** | **15** | **17** | **6** | 38 | **0** | **0** | **10** | 10 | **98** |
| Decont. | Q | 0 | 7 | 1 | 0 | *8* | 2 | 2 | 0 | *4* | 0 | 0 | 1 | *1* | *13* |
| | A | 1 | 11 | 7 | 0 | *19* | 0 | 5 | 0 | *5* | 0 | 0 | 2 | *2* | *26* |
| | R | (12) | 1 | 1 | 0 | *02* | 0 | 6 | 0 | *6* | 0 | 0 | 0 | *0* | *08* |
| | **Total** | **01** | **19** | **9** | **0** | **29** | **2** | **13** | **0** | 15 | **0** | **0** | **3** | 3 | **47** |
| ***TOTAL*** | | ***02*** | ***27*** | ***26*** | ***24*** | ***79*** | ***17*** | ***30*** | ***6*** | ***53*** | ***0*** | ***0*** | ***13*** | ***13*** | ***145*** |

## 2- Le discours d'information

*Résultats chiffrés*

Note pour la lecture du tableau :

Nous indiquons les effectifs de chacune des sous-catégories sous la lettre N ainsi que leurs fréquences (exprimées en pourcentage) calculées par rapport à l'ensemble du discours sous le symbole %.

La colonne "ensemble du discours" présente les effectifs et fréquences d'unités par forme et relief du discours, toutes fonctions confondues.

Exemple :

Sur la première ligne du tableau, 55 signifie qu'il y a 55 unités de discours contextualisées répertoriées comme des questions. La fonction de l'une de celles-ci est indistinctement argumentation, information ou structuration.

| Forme | | Information | | | | | | | | | | Ensemble | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonction | Relief | C | | T | | I | | A | | Total | | du | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | discours | |
| Contex. | Q | 0 | *0* | 0 | *00* | 6 | *04,1* | 21 | *14,5* | 27 | ***18,6*** | 55 | *37,9* |
| | A | 1 | *00,7* | 8 | *05,5* | 11 | *07,6* | 2 | *01,4* | 22 | ***15,4*** | 38 | *26,2* |
| | R | (59) | | 0 | *00* | 0 | *00* | 1 | *00,7* | 01 | ***00,7*** | 05 | *03,4* |
| | **Total** | **01** | ***00,7*** | **8** | ***05,5*** | **17** | ***11,7*** | **24** | ***16,6*** | 80 | *34,5* | 98 | *67,6* |
| Décont. | Q | 0 | *00* | 7 | *04,8* | 1 | *00,7* | 0 | *00* | 8 | ***05,5*** | 13 | *09* |
| | A | 1 | *00,7* | 11 | *07,6* | 7 | *04,8* | 0 | *00* | 19 | ***13,1*** | 26 | *17,9* |
| | R | (12) | | 1 | *00,7* | 1 | *00,7* | 0 | *00* | 2 | ***01,4*** | 8 | *5,5* |
| | **Total** | **01** | ***00,7*** | **19** | ***13,1*** | **9** | ***06,2*** | **0** | ***00*** | 28 | *19,3* | 47 | *32,4* |
| TOTAL | | 02 | *01,4* | 27 | *18,6* | 26 | *17,9* | 24 | *16,6* | 79 | *54,5* | 145 | |

Commentaire

Par rapport à l'ensemble des interventions, la fonction "information" du discours est la plus importante avec 54,5% des interventions : elle représente plus de la moitié du discours de l'enseignante.

Le détail des totaux nous montrent que l'enseignante accorde autant d'importance à chacune des trois catégories d'informations : informations diverses (I), énoncés de propriétés, théorèmes... (IT) et, calculs et résultats immédiats (IA) avec respectivement 18,6%, 17,9 % et 16,6 % d'interventions pour chacune de ces catégories. Les deux formes de discours (contextualisée et décontextualisée) sont représentées mais ne sont pas réparties de la même façon. Cependant nous pouvons noter un total (IT + I) contextualisé proche du total (IT + I) décontextualisé (respectivement 17,2 % et 19,3 %). La différence entre les deux formes de discours d'information est une conséquence de "IA". L'exécution technique des connaissances se fait de façon contextualisée. Pour ce cours et cette enseignante, il semble que l'aspect technique soit réservé à des situations particulières, le général en est exclu.

Il se dégage de la fonction information que l'enseignante accorde de l'importance aux différents aspects "IA", "IT" et "I" et, qu'elle est attentive à la forme générale (décontextualisée) que certaines informations peuvent transporter. Au contraire, les applications de connaissances semblent très ponctuelles.

Les informations diverses (I) apparaissent sous les deux formes contextualisée et décontextualisée du discours. Elles incluent des mises en garde ainsi que des explications de notations et d'habitudes. Par ce biais, l'enseignante parle de ce qui est en train de se faire, apporte des éléments qui peuvent attirer l'attention des élèves d'un double point de vue :

- les notations, habitudes et appréciations permettent aux élèves de se situer par rapport à ce "qu'un mathématicien de Troisième" peut faire en conformité avec le reste de la communauté mathématique et,

- les mises en garde montrent une possibilité d'aller au-delà de ce qui est en train de se faire ou de le faire autrement sans pour autant expliciter davantage le contenu mathématique des points abordés.

Les informations sur les textes de mathématiques institutionnelles (IT) apparaissent elles-aussi suivant les deux formes du discours. Nous soupçonnons avec cette double présence, une volonté de l'enseignante de bien asseoir et cadrer les résolutions en cours : il y a non seulement la volonté de faire résoudre aux élèves des exercices et problèmes mais aussi la volonté d'asseoir mathématiquement leurs activités.

Dans l'ensemble, le niveau (n) d'enseignement semble bien présent en classe, doublé chez l'enseignante, de la présence d'autres connaissances qui ne se sont pas directement à destination des élèves, dont nous pouvons supposer qu'elles sont de niveau (n+p).

*<u>Relief du discours d'information</u>*

Nous reproduisons le tableau précédent organisé différemment. Les formes contextualisée et décontextualisée du relief apparaissent ensemble. Les nombres indiqués sont les mêmes et précisent les effectifs. Les nombres entre parenthèses sont, ici aussi, réservés aux réponses classées IC. La dernière colonne et la dernière ligne correspondent aux effectifs des catégories concernées pour l'ensemble du discours.

| Relief | | Question | | Accompagnement | | Réponse | | Ensemble discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonction | Forme | Context. | Décont. | Context. | Décont. | Context. | Décont. | Context. | Décont. |
| Information | C | 00 | 00 | 01 | 01 | (59) | (12) | 01 | 01 |
| | T | 00 | 07 | 08 | 11 | 00 | 01 | 08 | 19 |
| | I | 06 | 01 | 11 | 07 | 00 | 01 | 17 | 09 |
| | A | 21 | 00 | 02 | 00 | 01 | 00 | 24 | 00 |
| | **Total** | **27** | **08** | **22** | **19** | **01** | **02** | **50** | **28** |
| Ensemble discours | | 55 | 13 | 38 | 26 | 05 | 08 | 98 | 47 |

Commentaire

L'enseignante produit peu de réponses : les élèves ne questionnent pas beaucoup, les interventions font apparaître beaucoup d'accompagnement ; l'enseignante semble de la sorte compléter les propos tenus en classe.
Les accompagnements se partagent de façon presque identique entre le texte et les mises en garde. Etant donné que ce mode de discours est provoqué par ce qui se passe en classe, ce que disent les élèves, qu'il constitue souvent un apport informel et supplémentaire par rapport à ce qui était préparé, il montre ce qui est mobilisable ou disponible chez l'enseignant en fonction de la situation en cours. Cela conforte donc notre conclusion sur la présence de niveaux supérieurs au niveau (n) de la classe.
Enfin, les questions ne sont pas restreintes aux seuls calculs. Cela montre la volonté de l'enseignante de faire en sorte que le niveau (n) soit effectivement celui des élèves quant à l'exécution des calculs et aux références aux textes de propriétés, définitions, théorèmes... liés à ces calculs.

Nous retiendrons que l'enseignante accorde une importance aux propos des élèves et les sollicite sur ce qu'ils font, sur le niveau (n) avec les textes et des mises en garde.
L'enseignante ne se limite pas au niveau (n) puisque beaucoup d'accompagnements portent sur les textes et sont à caractère informatif "général" (la colonne I).
L'aspect décontextualisé n'est pas négligé.

## 3- Le discours d'argumentation

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Argumentation | | | | | | | | Ensemble | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | | P | | M | | Total | | du | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | discours | |
| Contex. | Q | 15 | *10,3* | 8 | *05,5* | 5 | *03,4* | 28 | ***19,3*** | 55 | *37,9* |
| | A | 0 | ***00*** | 5 | *03,4* | 1 | *00,7* | 6 | ***04,1*** | 38 | *26,2* |
| | R | 0 | ***00*** | 4 | *02,8* | 0 | ***00*** | 4 | ***02,8*** | 05 | *03,4* |
| | **Total** | **15** | ***10,3*** | 17 | ***11,8*** | 6 | ***04,1*** | 38 | ***26,2*** | **98** | ***67,6*** |
| Décont. | Q | 2 | *01,4* | 2 | *01,4* | 0 | ***00*** | 4 | ***02,8*** | 13 | *09* |
| | A | 0 | ***00*** | 5 | *03,4* | 0 | ***00*** | 5 | ***03,4*** | 26 | *17,9* |
| | R | 0 | ***00*** | 6 | *04,1* | 0 | ***00*** | 6 | ***04,1*** | 08 | *05,5* |
| | **Total** | **2** | ***01,4*** | **13** | ***09*** | **0** | ***00*** | 15 | ***10,3*** | **59** | ***32,4*** |
| TOTAL | | 17 | *11,8* | 30 | *20,7* | 6 | *04,1* | 53 | *36,6* | 145 | ***100*** |

Commentaire

En terme d'importance, l'argumentation occupe une place remarquable dans l'ensemble du discours avec plus du tiers (36,5 %) des interventions. Les formes contextualisée et décontextualisée sont toutes deux présentes mais pas au même niveau (26,2 % et 10,3 % resp.). De même que pour la forme, les catégories d'argumentation ne sont pas également réparties dans le discours (11,5 % pour "AC" 20,6 % pour "AP" et 4 % pour "AM"). La catégorie "AP" spécifique de l'aspect "raisonnement" du discours d'argumentation est la plus importante et est répartie entre les deux formes du discours. Souvenons-nous que cette catégorie compte aussi les interventions où l'enseignante demande aux élèves de faire des propositions, de faire état de leurs recherches de solutions des problèmes en cours. Cette attitude nécessite de l'enseignante la possibilité d'accepter et de mettre en œuvre différents raisonnements ou méthodes, ceux qu'elle aurait préparés mais aussi d'autres suscités par les propos des élèves. Cette catégorie "AP" est aussi celle où nous constatons le plus grand nombre d'interventions décontextualisées. La catégorie "AC" est moins fréquente que la catégorie "AP", elle ne laisse apparaître que 2 unités décontextualisées (soit 1,4 % de l'ensemble du discours). Il semble que l'enseignante estime moins nécessaire d'aborder cette catégorie notamment d'un point de vue "général".

*Le relief du discours d'argumentation*

Comme pour le discours d'information, nous reproduisons le tableau précédent organisé différemment. Les formes contextualisée et décontextualisée du relief apparaissent ensemble. Les nombres indiqués sont les mêmes et précisent les effectifs. La dernière colonne et la dernière ligne correspondent aux effectifs des catégories concernées pour l'ensemble du discours.

| Relief | | Question | | Accompagnement | | Réponse | | Ensemble discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonction | Forme | C | D | C | D | C | D | C | D |
| Argu-mentation | C | 15 | 02 | 00 | 00 | 00 | 00 | 15 | 02 |
| | P | 08 | 02 | 05 | 05 | 04 | 06 | 17 | 13 |
| | M | 05 | 00 | 01 | 00 | 00 | 00 | 06 | 00 |
| | **Total** | **28** | **04** | **06** | **05** | **04** | **06** | **38** | **15** |
| Ensemble discours | | 55 | 13 | 38 | 26 | 05 | 08 | 98 | 59 |

Commentaire

Le total des questions de la partie contextualisée est le plus important de cette forme de discours, ce n'est pas le cas pour la forme décontextualisée du discours.

Un grand nombre de questions contextualisées porte sur les mises en relation de situations et d'objets mathématiques, c'est-à-dire les questions que nous avons classées en "AC".

De même, la moitié des questions décontextualisées (2 sur 4...) portent sur le même thème.

Cela nous montre une grande dévolution de cette partie du raisonnement mathématique aux élèves.

L'absence d'accompagnements et de réponses à d'éventuelles questions d'élèves semble signifier que l'enseignante ne juge pas utile de compléter leurs propos.

Les autres aspects du discours d'argumentation : "AP" et "AM" sur le "pourquoi" et la "méthode" sont moins souvent abordés à l'aide de question par l'enseignante. Nous notons quelques accompagnements d'argumentations jouant le rôle d'explications (AP), ils sont autant présents en contextualisé qu'en décontextualisé.

Le faible nombre des réponses nous conduit à conclure à peu de questions de la part des élèves.

Les seules réponses fournies par l'enseignante sont toutes de type explicatif et se trouvent aussi bien en contextualisé qu'en décontextualisé.

Nous émettons ici plusieurs hypothèses :

- les éléments constitutifs des situations mathématiques dans lesquelles se trouvent les élèves font qu'ils n'ont pas besoin de poser de questions,
- lorsque les élèves prennent la parole, ils expriment le souhait d'aller au-delà du contexte créé par les exercices et problèmes en cours en abordant des parties décontextualisées,
- l'enseignante met à profit les questions et situations pour, avec les réponses et explications, aborder le texte décontextualisé,
- le petit nombre de questions de méthode et l'absence d'accompagnements et réponses montrent que l'activité s'y prêtait peu ou bien un souci peu marqué de l'enseignante à cet endroit.

De même que pour la fonction information du discours, nous constatons que l'enseignante accorde de l'importance aux propos des élèves, elle les sollicite directement sur les connaissances de niveau (n) avec la mise en application des textes et objets mathématiques avec les situations.

Ici aussi l'enseignante ne se limite pas au niveau (n), nous voyons apparaître des niveaux (n+p) avec les questions de type "pourquoi", il semble que cet accès soit assez aisé.

Notons toutefois que l'aspect décontextualisé n'est pas beaucoup mis en oeuvre.

## 4- Le discours de structuration

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Structuration | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | E | | R | | B | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contex. | Q | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | ***00*** | 55 | *37,9* |
| | A | 0 | *00* | 0 | *00* | 10 | *06,9* | 10 | ***06,9*** | 38 | *26,2* |
| | R | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | ***00*** | 05 | *03,4* |
| | **Total** | **0** | ***00*** | **0** | ***00*** | **10** | ***06,9*** | **10** | ***06,9*** | **98** | ***67,6*** |
| Décont. | Q | 0 | *00* | 0 | *00* | 1 | *00,7* | 1 | ***00,7*** | 13 | *09* |
| | A | 0 | *00* | 0 | *00* | 2 | *01,4* | 2 | ***01,4*** | 26 | *17,9* |
| | R | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | ***00*** | 08 | *05,5* |
| | **Total** | **0** | **00** | **0** | ***00*** | **3** | ***02,1*** | **3** | ***02,1*** | **47** | ***32,4*** |
| TOTAL | | 0 | *00* | 0 | *00* | 13 | *10* | 13 | *10* | 145 | *100* |

<u>Commentaire</u>

Notre commentaire sera très succinct.

Nous constatons des interventions exclusivement faites sous forme d'accompagnement et limitées au bilan. L'ensemble est essentiellement contextualisé. Le discours de structuration informe donc sur ce qui va être fait et résume ce qui a été fait. Il semble que d'autres apports de structuration ne soient pas utiles puisque les élèves ne questionnent pas (l'enseignante ne répond pas) et l'enseignante n'appelle pas (ou peu) d'autres contenus (elle ne questionne pas).

## 5- Conclusion

Nous constatons que le niveau (n) est bien présent en classe suivant un double aspect : l'application technique des connaissances et la structuration des connaissances contextualisées.
Nous avons remarqué de probables mises en relation de texte et objet mathématiques avec les situations que les élèves expérimentent. Les fondements mathématiques de ce qui est fait ne semblent pas ignorés. Il se dégage l'impression que l'enseignante écoute les élèves et s'adapte à leurs propos.

Dans l'ensemble, il semble que l'enseignante mette en œuvre ses connaissances de niveau (n+p) lorsqu'elle est en classe avec les élèves.

## *C- Etude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E3*

Comme pour E1 et E2 le premier des cinq paragraphes composant l'étude de la répartition des unités de discours de l'enseignante E3 présente un tableau récapitulatif de l'ensemble du discours. Les trois paragraphes qui suivent abordent successivement le relief du discours, la fonction du discours et la fonction et la forme du discours. Le cinquième et dernier paragraphe est réservé à la conclusion.

### 1- Tableau récapitulatif

*Résultats chiffrés*

Les nombres indiqués dans le tableau correspondent aux nombres d'unités répertoriées par catégorie et sous-catégorie pour la fonction du discours. Nous précisons également des totaux partiels par catégorie et sous-catégorie.
Les nombres indiqués entre parenthèses correspondant aux unités de discours classées "réponse IC" ne sont pas inclus dans les totaux.

| Fonction | | Information | | | | | Argumentation | | | | Structuration | | | | Ensemble |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | T | I | A | Total | C | P | M | Total | E | R | B | Total | discours |
| Déc-ont-extu-alisée | Q | | 3 | 1 | 14 | *18* | 0 | 0 | 1 | *1* | 0 | 0 | 1 | *1* | ***20*** |
| | A | 0 | 7 | 6 | 2 | *15* | 2 | 2 | 1 | *5* | 3 | 1 | 7 | *11* | ***31*** |
| | R | (11) | 2 | 2 | 4 | *08* | 0 | 6 | 3 | *9* | 2 | 0 | 3 | *5* | ***22*** |
| | *Total* | ***(11)*** | ***12*** | ***9*** | ***20*** | **41** | ***2*** | ***8*** | ***5*** | **15** | ***5*** | ***1*** | ***11*** | **17** | ***73*** |
| Cont-extu-alisée | Q | | 1 | 3 | 10 | *14* | 7 | 3 | 0 | *10* | 0 | 0 | 0 | *0* | ***24*** |
| | A | 0 | 1 | 15 | 6 | *22* | 0 | 6 | 2 | *8* | 1 | 0 | 0 | *1* | ***31*** |
| | R | (24) | 3 | 5 | 8 | *16* | 0 | 8 | 1 | *9* | 0 | 0 | 0 | *0* | ***25*** |
| | *Total* | ***(24)*** | ***5*** | ***23*** | ***24*** | **52** | ***7*** | ***17*** | ***3*** | **27** | ***1*** | ***0*** | ***0*** | **1** | **80** |
| TOTAL | | **(35)** | **17** | **32** | **44** | **93** | **9** | **25** | **8** | **42** | **6** | **1** | **11** | **18** | **153** |

## 2- Le relief du discours

*Résultats chiffrés*

Nous reproduisons le tableau précédent organisé différemment. Les formes contextualisée et décontextualisée du relief apparaissent ensemble. Les nombres indiqués sont les mêmes et précisent les effectifs. Les nombres entre parenthèses sont, ici aussi, réservés aux réponses classées IC. La dernière colonne et la dernière ligne correspondent aux effectifs des catégories concernées pour l'ensemble du discours.

| Relief | | Question | | Accompagnement | | Réponse | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | | Contextualisée | Décontextualisée | Contextualisée | Décontextualisée | Contextualisée | Décontextualisée | Contextualisée | Décontextualisée |
| Fonction | | | | | | | | | |
| Information | C | 00 | 00 | 00 | 00 | 11 | 24 | 11 | 24 |
| | T | 03 | 01 | 07 | 01 | 02 | 03 | 12 | 05 |
| | I | 01 | 03 | 06 | 15 | 02 | 05 | 09 | 23 |
| | A | 14 | 10 | 02 | 06 | 04 | 08 | 20 | 24 |
| | **Total** | **18** | **14** | **15** | **22** | **08** | **16** | **41** | **52** |
| Argumentation | C | 00 | 07 | 02 | 00 | 00 | 00 | 02 | 07 |
| | P | 00 | 03 | 02 | 06 | 06 | 08 | 08 | 17 |
| | M | 01 | 00 | 01 | 02 | 03 | 01 | 05 | 03 |
| | **Total** | **01** | **10** | **05** | **08** | **09** | **09** | **15** | **27** |
| Structuration | E | 00 | 00 | 03 | 01 | 02 | 00 | 05 | 01 |
| | R | 00 | 00 | 01 | 00 | 00 | 00 | 01 | 00 |
| | B | 01 | 00 | 07 | 00 | 03 | 00 | 11 | 00 |
| | **Total** | **01** | **00** | **11** | **01** | **05** | **00** | **17** | **01** |
| TOTAL | | 20 | 24 | 31 | 31 | 22 | 25 | 73 | 80 |

### *2.1- Aspect général*

Nous réduisons la taille du tableau par souci de lisibilité : seule la forme apparaît.

| Forme | Décontextualisée N | % | Contextualisée N | % | Total N | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Question | 20 | 13,1 | 24 | 15,7 | 44 | 28,8 |
| Accompagnement | 31 | 20,3 | 31 | 20,3 | 62 | 40,5 |
| Réponse | 22 | 14,4 | 25 | 16,3 | 47 | 30,7 |
| Total | 73 | 47,7 | 80 | 52,3 | 153 | 100 |

Commentaire

La répartition des questions, accompagnements, et réponses est relativement équilibrée entre les formes contextualisée et décontextualisée : les deux formes du discours sont abordées de façon similaire. La présence non négligeable de réponses montre que les élèves questionnent l'enseignante qui répond. La présence importante d'accompagnements montre que l'enseignante éprouve la nécessité de compléter le contenu des questions et réponses.

### *2.2- Les questions*

Les questions représentent 28,8 % du total des interventions, elles apparaissent essentiellement en information (28 questions soit 18,3 %), nous en constatons quelques-unes en argumentation (10 questions soit 6,5 %) : les fonctions du discours ne sont pas abordées de la même façon. Cependant, pour le discours contextualisé, nous trouvons presque autant de questions en information qu'en argumentation. Pour le discours décontextualisé, nous n'avons repéré qu'une seule question d'argumentation pour 18 en information.

Concernant le discours d'information, l'essentiel des questions est repéré “IA”, celles-ci sont des demandes de résultats numériques ou bien portent sur des applications de connaissances de niveau technique.

A l'exception d'une seule, les onze questions que rassemble la fonction argumentation du discours sont contextualisées. Ces dernières font apparaître davantage de demandes de "comment" (AC) que de "pourquoi" (AP).

Dans l'ensemble, nous constatons beaucoup de demandes de résultats tirées directement des connaissances déjà en place des élèves ou bien des demandes de calculs numériques. Nous constatons peu de références aux raisonnements qui conduisent à ces résultats "techniques".

### *2.3- Les réponses*

Les réponses représentent 30,7 % des interventions, 10 % d'entre elles sont classées "AP". Puisque le nombre de questions "AP" (2 %) est bien inférieur au nombre de réponses "AP" nous pouvons dire que ces dernières sont directement suscitées par des questions d'élèves. Par ailleurs, nous constatons que l'enseignante ne répond pas aux élèves sur le mode du comment, en effet aucune réponse n'est classée "AC". Il semble que les élèves éprouvent le besoin d'entraîner l'enseignante sur le terrain des fondements mathématiques (AP) de ce qu'ils étudient montrant en cela que l'enseignante ne les devance pas (à la hauteur de leur besoin) sur cet aspect des connaissances. Ce constat conjugué à l'absence de réponse "AC" nous conduit à esquisser la conclusion suivante : les connaissances de niveau (n+p) de l'enseignante sont proches dans son discours, elle ne les utilise pas ou alors seulement partiellement.

Notons que la participation des élèves (attestée par les réponses que formule l'enseignante) peut signifier que l'enseignante contribue à créer les condition de leur participation.

### *2.4- Les accompagnements*

Le discours d'accompagnement représente 40,5 % du total du discours. Nous le relevons essentiellement en information (20,7 %), il est presque également réparti entre l'argumentation et la structuration (8,5 % et 7,8 %). Nous remarquons cependant une quasi-absence de cette catégorie en structuration contextualisée : l'accompagnement se fait presque exclusivement sous forme décontextualisée en structuration.

Nous estimons que les nombreux accompagnements sont en partie dus aux interventions d'élèves qui provoquent chez l'enseignante la nécessité de compléter leurs propos ou d'ajouter des commentaires.

Nous notons une prédominance d'accompagnement "AP" par rapport aux questions "AP". Tout se passe comme si l'enseignante complétait des éléments de cours qui n'ont été abordés directement ni par ses questions ni par celles des élèves. Nous pouvons en conclure que l'enseignante "profite" des occasions qui se présentent lors du déroulement du cours pour intervenir et commenter. Ceci montre une certaine disponibilité de ses connaissances.

Dans l'ensemble le relief du discours donne l'impression que l'enseignante n'aborde la construction ou le renforcement des connaissances des élèves qu'au détour d'occasions particulières conséquences directes des propos tenus par les élèves, occasions où ses connaissances (n+p) semblent mises en œuvre.

## 3- La fonction du discours

### *3.1- Le discours d'information*

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Information | | | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | | T | | I | | A | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Décontex-tualisée | Q | | | 3 | 02 | 1 | 00,7 | 14 | 09,2 | 18 | 11,8 | 20 | 13,1 |
| | A | 0 | 00 | 7 | 04,6 | 6 | 04 | 2 | 01,3 | 15 | 09,8 | 31 | 20,3 |
| | R | (11) | | 2 | 01,3 | 2 | 01,3 | 4 | 02,6 | 8 | 05,2 | 22 | 14,4 |
| | **Total** | **(11)** | **00** | **12** | **07,8** | **9** | **05,9** | **20** | **13,1** | **41** | **26,8** | **73** | **47,8** |
| Contex-tualisée | Q | | | 1 | 00,7 | 3 | 02 | 10 | 06,5 | 18 | 11,8 | 24 | 15,7 |
| | A | 0 | 00 | 1 | 00,7 | 15 | 09,8 | 6 | 04 | 22 | 14,4 | 31 | 20,3 |
| | R | (24) | | 3 | 02 | 5 | 03,3 | 8 | 05,2 | 16 | 10,5 | 25 | 16,3 |
| | **Total** | **(24)** | **00** | **5** | **03,3** | **23** | **15** | **24** | **15,7** | **52** | **34** | **80** | **52,3** |
| TOTAL | | (35) | 00 | 17 | 11,1 | 32 | 21 | 44 | 28,8 | 93 | 60,8 | 153 | 100 |

<u>Commentaire</u>

La fonction information est la plus fréquente, elle représente plus de la moitié du discours (60,8 %). Elle porte essentiellement sur les applications (IA) et les divers (I : mises en garde, notation, énoncés...). Les textes de mathématiques institutionnalisées interviennent plus rarement : pour ce cours, la manipulation d'objet est plus importante que la justification de leur utilisation. Il semble que l'enseignante veuille mettre en évidence des points susceptibles d'être difficiles pour les élèves ainsi que certains gestes du "mathématicien (de troisième)" parfois étayes par des appels à quelques textes de mathématiques décontextualisées.

### *3.2- Le discours d'argumentation*

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Argumentation | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | C | | P | | M | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contextualisée | Q | 0 | *00* | 0 | *00* | 1 | *00,7* | 1 | *00,7* | 20 | *13,1* |
| | A | 2 | *01,3* | 2 | *01,3* | 1 | *00,7* | 5 | *03,3* | 31 | *20,3* |
| | R | 0 | *00* | 6 | *03,9* | 3 | *02* | 9 | *06* | 22 | *14,4* |
| | **Total** | **2** | ***01,3*** | **8** | ***05,2*** | **5** | ***03,3*** | **15** | ***10*** | **73** | ***47,7*** |
| Décontex. tualisée | Q | 7 | *04,6* | 3 | *02* | 0 | *00* | 10 | *06,6* | 24 | *15,7* |
| | A | 0 | *00* | 6 | *03,9* | 2 | *01,3* | 8 | *05,2* | 31 | *20,3* |
| | R | 0 | *00* | 8 | *05,2* | 1 | *00,7* | 9 | *06* | 25 | *16,3* |
| | **Total** | 7 | ***04,6*** | 17 | *11,1* | 3 | ***02*** | 27 | *17,6* | **80** | *52,3* |
| TOTAL | | 9 | *06* | 25 | *16,3* | 8 | *05,2* | 42 | *27,4* | 153 | *100* |

Commentaire

Une grande partie de l'argumentation est réservée au "pourquoi" (AP). Le discours de méthode (AM) est présent, presque au même niveau que le "comment" (AC). L'ensemble de ces trois aspects du discours d'argumentation montre que le niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances n'est pas le seul à être sollicité dans la classe. Contrairement au discours décontextualisé, l'argumentation contextualisée n'apparaît pas seulement sur le mode de la réponse : l'enseignante contribue directement à cette apparition en questionnant et en accompagnant les propos de la classe. Ainsi, nous pouvons affirmer que les connaissances de niveau (n+p) sont sous-jacentes au discours de l'enseignante.

### *3.3- Le discours de structuration*

*Résultats chiffrés*

Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la lecture du tableau.

| Fonction | | Structuration | | | | | | | | Ensemble du discours | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Relief | E | | R | | B | | Total | | | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | | |
| Contextualisée | Q | 0 | *00* | 0 | *00* | 1 | *00,7* | 1 | *00,7* | 20 | *13* |
| | A | 3 | *02* | 1 | *00,7* | 7 | *04,6* | 11 | *07,2* | 31 | *20,3* |
| | R | 2 | *01,3* | 0 | *00* | 3 | *02* | 5 | *03,3* | 22 | *14,4* |
| | **Total** | **5** | ***03,3*** | **1** | ***00,7*** | **11** | ***07,2*** | **17** | ***11,1*** | **73** | ***47,7*** |
| Décontex. tualisée | Q | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 24 | *15,7* |
| | A | 1 | *00,7* | 0 | *00* | 0 | *00* | 1 | *00,7* | 31 | *20,3* |
| | R | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 0 | *00* | 25 | *16,3* |
| | **Total** | **1** | ***00,7*** | **0** | ***00*** | **0** | ***00*** | **1** | ***00,7*** | **80** | ***52,3*** |
| TOTAL | | 6 | *04* | 1 | *00,7* | 11 | *07,2* | 18 | *11,8* | 143 | *100* |

Commentaire

Le discours de structuration montre que l'enseignante indique des étapes (SE) au cours des activités engagées en classes. Nous y voyons un caractère d'adaptation qui permet, à partir de ce que disent les élèves, de poursuivre les activités tout en les faisant avancer vers "d'autres mathématiques". Nous y voyons aussi une certaine disponibilité des connaissances de l'enseignante. La plus grande partie de la structuration est réservée à la sollicitation de la mémoire des élèves ou à la précision de ce qui vient d'être vu ou encore à la précision de ce qui va l'être. Les cadres du travail de la classe sont ainsi bien définis. Tout se passe comme si l'enseignante voulait montrer aux élèves comment appliquer les connaissances.

## 4- La forme et la fonction du discours

*Résultats chiffrés*

| | Information | | Argumentation | | Structuration | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Décontextualisé | 41 | 26,8 | 15 | 09,8 | 17 | 11,1 | 73 | 47,7 |
| Contextualisé | 52 | 34 | 27 | 17,6 | 01 | 00,7 | 80 | 52,3 |
| Total | 93 | 60,8 | 42 | 27,4 | 18 | 11,8 | 153 | 100 % |

Commentaire

Le discours décontextualisé représente 47,7% du discours, il se fait essentiellement sur le mode de l'information (41 unités sur 73 soit 56 %). Les fréquences d'apparitions des formes décontextualisées du discours d'argumentation et du discours de structuration sont proches (15 et 17 unités sur un total de 73 soit respectivement 23,3 % et 20,5 % de cette forme). La prédominance d'informations décontextualisées nous conduit à estimer que le travail des élèves porte sur des connaissances déjà en place. Les quelques arguments décontextualisés nous conduisent à estimer que ces connaissances nécessitent d'être consolidées.

Nos critères d'analyse du discours privilégiaient particulièrement la forme décontextualisée et la fonction argumentation du discours pour indiquer les lieux et moments où les enseignants sont susceptibles de mettre en œuvre des connaissances de niveau (n+p).

Le nombre d'informations nous fait dire que tout se passe comme s'il s'agissait d'un cours de consolidation des connaissances de niveaux (n) des élèves parfois vues sous un jour plus général (dû à la grande présence du décontextualisé).

Les mathématiques contextualisées représentent 52,3 % du discours total, elles apparaissent légèrement plus fréquemment que les mathématiques décontextualisées.

L'information et l'argumentation prédominent le discours contextualisé. L'argumentation intervient de façon non négligeable. De la sorte, il se dégage l'impression que l'enseignante sollicite des élèves un niveau d'application des connaissances qui se situe fréquemment au-delà du technique.

La répartition entre les formes contextualisée et décontextualisée du discours d'information est de 34 % et 26,8 % du discours, la différence entre les deux est de 7,2 %. La répartition entre les deux formes contextualisée et décontextualisée du discours d'argumentation est de 17,6 % et 9,8 % soit une différence de 7,8 %. Les différences de répartitions sont proches. Etant donné que la fréquence du discours d'information (60,8 %) est supérieure au double de la fréquence du discours d'argumentation (27,4 %) et que les différences entre les deux formes de chacun de ces discours ne suivent pas ce rapport, nous pouvons conclure que l'enseignante ne manipule pas de la même façon les formes du discours suivant les deux fonctions argumentation et information.

La fonction structuration est la moins représentée avec 11,8 %. Elle est quasiment absente du discours contextualisé.

L'enseignante ne manipule pas de la même façon les formes du discours suivant les trois fonctions information, argumentation et structuration.

## 5- Conclusion

L'analyse de la répartition du discours nous a permis de relever les caractéristiques suivantes :

- il semble que les élèves entraînent souvent l'enseignante à faire apparaître des méthodes et à expliquer les fondements de certaines de leurs actions,

- il semble que cette première caractéristique entraîne l'enseignante à solliciter ses connaissances de niveau (n+p) .

Tout se passe comme si l'enseignante exposait des connaissances de niveau (n) d'un point de vue général (décontextualisé) sur lesquels les élèves réclament des explications, qui entraînent alors l'enseignante à mettre en œuvre ses connaissances.

## *D- Comparaison des répartitions des unités des trois discours*

Nous abordons ici le dernier point composant cette partie du chapitre II réservé exclusivement au discours. Nous établissons une petite comparaison entre les discours des trois enseignantes. Nous présentons sept tableaux que nous commenterons succinctement. Les deux premiers porteront sur la forme et la fonction du discours, le troisième conjuguera les deux premiers. Le quatrième tableau sera consacré au relief du discours, les cinquième et sixième croiseront respectivement forme et relief puis fonction et relief. Enfin le dernier tableau sera réservé aux trois catégories : forme, fonction et relief. Nous terminerons l'ensemble par une conclusion.

A l'exception du dernier tableau, nous rappellerons dans tous les tableaux les nombres d'unités de discours des catégories concernées (distingués par la lettre N) ainsi que les fréquences d'apparition (exprimées en pourcentages et précédées du symbole %). Les fréquences rendront ainsi les comparaisons plus lisibles. Nous destinerons une ligne (au-moins) par tableau et par enseignante. Afin de ne pas surcharger les tableaux, nous avons choisi de n'indiquer que les trois grandes catégories de la fonction du discours (information, argumentation et structuration)

### 1- La forme des discours

*Résultats chiffrés*

| Forme du discours | Contextualisée | | Décontextualisée | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Enseignante | N | % | N | % | N | % |
| E1 | 154 | 76,2 | 48 | 23,8 | 202 | 100 |
| E2 | 98 | 67,6 | 47 | 32,4 | 145 | 100 |
| E3 | 80 | 52,3 | 73 | 47,7 | 153 | 100 |

Commentaire

Pour les trois enseignantes le discours contextualisé représente plus de la moitié du discours. Cet aspect commun est à nuancer puisque la forme contextualisée représente à peine plus de la moitié du discours de l'enseignante E3 alors qu'elle représente plus des trois quarts du discours de E1. La forme décontextualisée est plus fréquente dans le discours de E3 que dans les discours de E1 et E2. Il semble donc que la troisième enseignante se réfère plus fréquemment que les deux autres enseignantes à l'aspect général des connaissances des élèves, ce que nous interprétons ainsi : une apparente cohérence d'ensemble cache des dissemblances.

## 2- La fonction des discours

*Résultats chiffrés*

| Fonction | Information | | Argumentation | | Structuration | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Enseignante | N | % | N | % | N | % | N | % |
| E1 | 97 | 48 | 76 | 37,6 | 29 | 14,4 | 202 | 100 |
| E2 | 79 | 54,5 | 53 | 36,5 | 13 | 09 | 145 | 100 |
| E3 | 93 | 60,8 | 42 | 27,4 | 18 | 11,8 | 153 | 100 |

Commentaire

Le discours d'information est le plus fréquent dans chacun des trois discours. De même que pour la forme contextualisée, cet aspect commun est à nuancer. L'enseignante E1 "n'informe" pas aussi souvent que l'enseignante E3 : bien plus de la moitié du discours pour E3 (60,8 %), légèrement moins de la moitié pour E1 (48 %).

Le discours d'argumentation est presque autant abordé par E1 que par E2 avec 38 % et 36,5 % du discours. Il n'en est pas de même pour E3 dont le discours d'argumentation apparaît à hauteur de

27,4 %. Ce taux plus faible que les deux autres n'est cependant pas négligeable. Il semble que E3 aborde les "fondements mathématiques" des connaissances des élèves moins souvent que les deux autres enseignantes (ce point est peut-être compensé par le décontextualisé, l'utilisation générale valant pour argumentation : les écarts seraient alors moins importants).
Par rapport à l'ensemble du discours, la structuration est la fonction qui différencie le moins les enseignantes. Le taux le plus faible est enregistré chez la deuxième enseignante.
Si l'argumentation est effectivement compensée par l'information décontextualisée il pourrait alors apparaître une cohérence d'ensemble dont on pourrait tirer un modèle ressemblant à chacun des trois discours. Nous constaterons effectivement un point commun aux trois enseignantes concernant les connaissances à présenter aux élèves. Les connaissances propres des enseignantes ne suivront pas la même caractéristique.

### 3- La forme et la fonction des discours

*Résultats chiffrés*

| Fonction | Information | | | | Argumentation | | | | Structuration | | | | Discours total | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | Context. | | Décont. | | Context. | | Décont. | | Context. | | Décont. | | Context. | | Décont. | |
| Enseignante | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N |
| E1 | 38,6 | 78 | 09,4 | 19 | 29,2 | 59 | 08,4 | 17 | 08,4 | 17 | 05,9 | 12 | 76,2 | 154 | 23,8 | 48 |
| E2 | 34,5 | 50 | 20 | 29 | 26,2 | 38 | 10,3 | 15 | 06,9 | 10 | 02,1 | 03 | 67,6 | 98 | 32,4 | 47 |
| E3 | 34 | 41 | 26,8 | 52 | 17,6 | 15 | 09,8 | 27 | 00,6 | 17 | 11,1 | 01 | 47,7 | 73 | 52,3 | 80 |

Commentaire

Les trois fonctions contribuent à créer le grand écart que nous avons constaté entre chacune des deux formes des discours de E1 et E3 (cf. 1). Nous restreignant à la forme contextualisée, la fonction information présente des fréquences relativement proches (38,6 %

pour E1 et 34 % pour E3), alors que la fonction argumentation contribue largement à créer une différence entre les deux enseignantes (29,2 % et 17,6 %). La fonction structuration y contribue également (08,4 % et 00,6 %). Les formes du discours ne distinguent pas de la même façon les fonctions information et argumentation des discours de E1 et E3. Les fréquences d'information contextualisée sont voisines tandis que les fréquences d'argumentation contextualisée présentent un écart non négligeable[1]. Inversement, les fréquences d'information décontextualisée présentent un grand écart alors que les fréquences d'argumentation décontextualisée sont voisines. Les discours des enseignantes E1 et E3 diffèrent du point de vue de la fréquence et de l'utilisation de l'information : le discours de E3 est plus général que celui de E1, ils diffèrent aussi du point de vue de la fréquence et de l'utilisation de l'argumentation ; le discours de E1 est plus souvent réservé au particulier. Par rapport à l'ensemble du discours, la structuration ne distingue pas les deux enseignantes mais le détail laisse apparaître une structuration, elle aussi, plus souvent réservée au particulier pour E1. Nous pouvons établir un constat similaire pour les discours de E1 et de E2, les écarts étant cependant moins importants entre E1 et E2 qu'entre E1 et E3.

Nous constatons des écarts importants entre les discours d'argumentation contextualisée et les deux formes de discours de structuration de E2 et E3. Le détail des formes et fonctions du discours laisse apparaître une différence entre les informations décontextualisées des enseignantes E1 et E2 : E2 décontextualise davantage cette fonction.

Globalement, E2 se distingue peu des enseignantes E1 et E3, cependant le détail du discours infirme cette apparence.

L'information contextualisée porte essentiellement sur le niveau technique de mise en œuvre des connaissances des élèves, connaissances appliquées d'un point de vue particulier. L'argumentation décontextualisée indique un raisonnement mathématique plutôt général. Nous avons voulu repérer à l'aide de ce mode de discours les moments où les enseignantes accompagnent les constructions de connaissances des élèves. Le caractère général de ce mode en fait souvent un témoin des niveaux mobilisables voire disponibles de mise en œuvre des connaissances des élèves.

[1] Le terme négligeable est relatif. Nous n'avons pas établi de seuil à partir duquel nous pouvons dire qu'une fréquence enregistrée est significative. De même nous n'avons pas établi de seuil à partir duquel nous pouvons dire qu'une différence de fréquence est significative. Nonobstant, nous considérons qu'un écart de 10% est significatif et par conséquent non négligeable. Ceci nous suggère comme piste de réflexion pour les seuils significatifs une définition dont la teneur serait : nombre minimum d'unité dont nous estimons que l'ensemble présente un sens cohérent pour les élèves.

Nous pouvons constater que l'information contextualisée et l'argumentation décontextualisée sont les seuls modes de discours qui ne distinguent pas beaucoup les trois enseignantes entre elles.

Tout se passe comme s'il y avait un "contenu mathématique minimum" à aborder obligatoirement dont les discours d'information contextualisé et d'argumentation décontextualisé étaient l'écho. Ce contenu minimum apparaît avec des fréquences semblables pour les trois enseignantes. Le "reste" des cours n'est pas abordé de la même façon par les trois enseignantes. Ce "reste" qui "agrémente" le minimum et accompagne la construction des connaissances des élèves semble ainsi présenter une importance variable suivant les enseignantes. Ici l'implication des connaissances des enseignantes jouera certainement un grand rôle. Nous le découvrirons dans la suite.

## 4- Le relief des discours

*Résultats chiffrés*

| Relief | Question | | Accompagnement | | Réponse | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Enseignante | N | % | N | % | N | % | N | % |
| E1 | 87 | 43,1 | 61 | 30,2 | 54 | 26,7 | 202 | 100 |
| E2 | 68 | 46,9 | 64 | 44,1 | 13 | 09 | 145 | 100 |
| E3 | 44 | 28,8 | 62 | 40,5 | 47 | 30,7 | 153 | 100 |

Commentaire

La première et la deuxième enseignantes questionnent les élèves plus fréquemment que l'enseignante E3. Il semble ainsi que les enseignantes E1 et E2 donnent davantage d'importance que E3 au fait que les élèves explicitent leurs connaissances.

La deuxième et la troisième enseignante accompagnent les élèves plus souvent que E1. Nous dirons donc, que ces enseignantes considèrent important de compléter (sous forme d'accompagnement) ce qui se fait en classe.

Les enseignantes E1 et E3 répondent aussi fréquemment aux élèves. Nous constatons donc que les éventuelles questions que les élèves peuvent se poser ne sont pas résolues entre les questions et les accompagnements des deux enseignantes.

Dans l'ensemble, nous constatons que E1 propose un cours essentiellement questionné, souvent accompagné et complété par l'intermédiaire des élèves. Si nous pouvons associer nombre élevé de question et préparation du cours alors nous pouvons dire que le cours de l'enseignante est préparé, le détail des situations abordées est prévu, toutefois les élèves y prennent une place non négligeable.

Les attentes de la classe de la deuxième enseignante semblent presque toutes satisfaites entre les questions et les accompagnements. Si nous maintenons l'association entre nombre élevé de question et préparation du cours, alors le nombre élevé de question semble signifier que le cours de E2 est - lui aussi - préparé. Cette préparation n'empêche pas l'enseignante d'interpréter ce qui se passe en classe et d'y faire écho avec les accompagnements (à un niveau plus élevé que E1 et E3). Il est probable que ces deux caractéristiques conduisent les élèves à ne pas beaucoup intervenir.

Le cours de la troisième enseignante est peu questionné et se fait essentiellement sous forme d'accompagnement ou bien grâce aux questions des élèves soit, sous forme de réponse. Nous oserons une hypothèse : l'enseignante crée des situations qui entraînent les élèves à questionner ce qui permet de constituer ou de compléter le cours : la préparation du cours de l'enseignante se situerait davantage autour des situations dans leur ensemble que dans leurs détails.

Notons Q1, Q2, Q3 ; R1, R2, R3 et A1, A2, A3 les fréquences des questions, réponses et accompagnements émis par chacune des enseignantes E1, E2, E3. Comparons ces nombres, nous obtenons :

$$Q3 < Q1 < Q2$$

$$R2 < R1 < R3$$

$$A1 < A3 < A2$$

Nous constatons que l'ordre des fréquences des réponses est l'inverse de celui des questions. L'ordre des fréquences des accompagnements ne suit aucun des deux autres. Il se dégage de ces comparaisons (légères) que plus les élèves sont questionnés, moins ils questionnent les enseignantes, qui en conséquence répondent moins fréquemment. Il y aurait une corrélation entre questions des enseignants et questions des élèves. Les accompagnements apparaissent moins directement liés au reste du discours de la classe. Nous proposons une interprétation en terme de préparation des séances : plus le détail des séances est prévu, plus les enseignantes posent "facilement" et donc fréquemment, des questions. Quelques questions sont certainement dues à des improvisations sur le vif, cependant nous estimons que les accompagnements sont plus représentatifs des improvisations sur le vif que les questions. Nous pensons que les improvisations nécessitent un accès (plutôt) aisé aux connaissances propres de l'improvisateur. Si les questions supposent effectivement une préparation préalable, elles peuvent signifier que les connaissances propres des enseignantes ont été "consultées" au moment des préparations.
Nos interprétations nous conduisent à tracer un "profil" des enseignantes.

- E1 : la préparation du cours l'entraîne à prévoir les situations auxquelles seront confrontés les élèves ainsi que les détails des situations. Ses connaissances sont sollicitées au moment de la préparation, cette sollicitation doit être très pointue.

- E2 : profil semblable à E1, la fréquence des réponses aux questions d'élèves étant relativement faible, nous en déduisons que E2 devance leurs questions. En conséquence, nous inférons que E2 sollicite davantage ses connaissances que E1 pour prévoir ces moments. La sollicitation peut être différente plutôt que plus approfondie : il se peut que ce ne soient pas les mêmes connaissances qui soient sollicitées.

- E3 : il semble que l'enseignante prépare l'aspect général des situations auxquelles seront confrontés les élèves, le détail étant réservé à la classe ; en quelque sorte, l'enseignante attend que les élèves posent des questions sur le détail pour y répondre. Ce profil nécessite une sollicitation des connaissances au moments où les situations sont construites i.e. en classe, avec les élèves.

Une alternative s'offre :

1- nous pouvons croire que la mise en œuvre des connaissances propres aux enseignantes E1 et E2 sera plus aisée en classe que pour E3 puisqu'elles auront été en parties prévues au moment des préparations, qu'il ne s'agira alors que d'une "répétition" et que le travail d'accès à ces connaissances aura été indirectement prévu.

2- au contraire, nous pouvons penser que E3 s'adaptera plus facilement aux élèves que E2 et E1 car elle sera moins tentée de suivre un modèle préparé. En conséquence, nous pouvons penser que l'accès à ses propres connaissances sera plus aisé.

La suite nous montrera que tout n'est pas si simple, nous aurons l'occasion de préciser chaque situation.

## 5- La forme et le relief des discours

*Résultats chiffrés*

Note : les lettres C et D signifient respectivement contextualisé et décontextualisé.

| Relief | Question | | | | Accompagnement | | | | Réponse | | | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forme | C | (%) | D | (%) | C | (%) | D | (%) | C | (%) | D | (%) | | (%) |
| E1 | 76 | 37,6 | 11 | 05,5 | 40 | 19,8 | 21 | 10,4 | 38 | 18,8 | 16 | 07,9 | 202 | 100 |
| E2 | 55 | 37,9 | 13 | 09 | 38 | 26,2 | 26 | 18 | 5 | 03,5 | 8 | 05,5 | 145 | 100 |
| E3 | 24 | 15,7 | 20 | 13,1 | 31 | 20,3 | 31 | 20,3 | 25 | 16,3 | 22 | 14,4 | 153 | 100 |

Commentaire

Les questions décontextualisées et les accompagnements contextualisés sont les modes de discours qui rapprochent le plus les trois enseignantes.

E3 se distingue des enseignantes E1 et E2 essentiellement par les questions contextualisées : plus de 20 % d'écart sépare E3 de E1 et E2. Ce constat était le même pour l'ensemble du discours.

Les accompagnements sont plus fréquents pour les enseignantes E2 et E3 que pour E1 suivant les deux formes du discours. Ce constat était le même pour l'ensemble du discours.

Les réponses sont plus fréquentes pour E1 et E3 que pour E2 suivant les deux formes du discours. Ce constat était le même pour l'ensemble du discours.

Adoptons une notation des différentes fréquences semblable à celle adoptée ci-dessus. Supprimons les chiffres 1, 2 et 3 indicatifs des enseignantes et notons C et D les formes contextualisée et décontextualisée du discours. Ordonnons les fréquences pour chacune des trois enseignantes. Nous obtenons :

- pour E1 QC > AC > RC > AD > RD > QD
- pour E2 QC > AC > AD > QD > RD > RC
- pour E3 AD > AC > RC > QC > RD > QD.

Nous constatons que les accompagnements contextualisés (AC) et les réponses décontextualisées (RD) se trouvent en même position pour chacune des trois enseignantes (seconde et avant-dernière). Dans un premier temps nous dirons qu'il semble alors que certains aspects du discours (AC et RD) jouent le même rôle pour les trois enseignantes.

Etablissons une dernière comparaison entre enseignantes et par forme du discours. Pour cela, nous distinguerons de nouveau les enseignantes par des numéros et nous maintenons la notation Q, A, R pour désigner question, accompagnement et réponse et, C, D pour désigner contextualisé et décontextualisé. Comparons les fréquences obtenues. Rappelons également les résultats obtenus pour l'ensemble du discours. Nous obtenons :

| | | |
|---|---|---|
| QC3 < QC1 < QC2 | AC1 < AC3 < AC2 | RC2 < RC3 < RC1 |
| QD1 < QD2 < QD3 | AD1 < AD2 < AD3 | RD2 < RD1 < RD3 |
| Q3 < Q1 < Q2 | A1 < A3 < A2 | R2 < R1 < R3 |

Concernant les accompagnements et les questions, l'ordre obtenu pour la forme contextualisée est le même que celui obtenu pour l'ensemble du discours. Concernant les réponses l'ordre obtenu pour les fréquences décontextualisées est le même que celui obtenu pour les fréquences de l'ensemble du discours.

Le discours contextualisé semble représentatif de la distinction entre les enseignantes concernant les questions et accompagnements, le discours contextualisé possède cette même caractéristique concernant les réponses.

Finalement, nous retiendrons les points suivants.

1- Les questions contextualisées sont représentatives de l'ensemble du discours mais ne jouent pas le même rôle pour chacune des enseignantes.

2- Les accompagnements contextualisés sont représentatifs de l'ensemble du discours et jouent le même rôle pour chacune des enseignantes.

3- les réponses décontextualisées sont représentatives de l'ensemble du discours et jouent le même rôle pour chacune des trois enseignantes.

## 6- La fonction et le relief des discours

*Résultats chiffrés*

| Fonction | | Information | | Argumentation | | Structuration | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Relief | Enseignante | % | N | % | N | % | N |
| Question | E1 | 25 | 51 | 16,8 | 34 | 10 | 02 |
| | E2 | 24,1 | 35 | 22,1 | 32 | 00,7 | 02 |
| | E3 | 20,9 | 32 | 07,2 | 11 | 00,6 | 01 |
| Accompagnement | E1 | 10,4 | 21 | 07,9 | 16 | 11,9 | 24 |
| | E2 | 28,3 | 41 | 07,6 | 11 | 08,3 | 12 |
| | E3 | 24,2 | 37 | 08,5 | 13 | 07,8 | 12 |
| Réponse | E1 | 12,4 | 25 | 12,9 | 26 | 14,8 | 03 |
| | E2 | 20,7 | 03 | 06,9 | 10 | 00 | 00 |
| | E3 | 16,7 | 24 | 11,8 | 18 | 03,3 | 05 |

Commentaire

Notre commentaire sera succinct. Pour chacune des trois enseignantes le maximum se trouve en question d'information. Le minimum ne suit pas la même règle, il se trouve en accompagnement d'argumentation chez E1 et en structuration (question) pour E3 et (réponse) pour E2.

Si nous voulions comparer les classements des fréquences entre les trois enseignantes (comme ci-dessus cf. 5) nous ne remarquerions pas de "régularité" comme nous en avons constaté ci-dessus (cf. 5). Cependant, nous constatons que les questions d'information présentent des fréquences d'apparitions voisines pour les trois enseignantes.

## 7- La fonction, la forme et le relief des discours

*Résultats chiffrés*

| Fonction | | Information | | Argumentation | | Structuration | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Relief | Enseignante | Context. | Décont. | Context. | Décont. | Context. | Décont. |
| | *E1* | *20,3* | *05* | *16,3* | *00,5* | *01* | *00* |
| *Question* | *E2* | *18,6* | *05,5* | *19,3* | *02,8* | *00* | *00,7* |
| | *E3* | *09,1* | *11,8* | *06,5* | *00,6* | *00* | *00,6* |
| | E1 | 07,9 | 02,5 | 05,5 | 02,5 | 06,4 | 05,5 |
| Accompagne- | E2 | 15,2 | 13,1 | 04,1 | 02,4 | 06,7 | 01,4 |
| ment | E3 | 15,4 | 09,8 | 05,2 | 03,3 | 00,6 | 07,2 |
| | *E1* | *10,4* | *02* | *07,4* | *05,5* | *01* | *00,5* |
| *Réponse* | *E2* | *00,7* | *01,4* | *02,8* | *04,1* | *00* | *00* |
| | *E3* | *10,5* | *05,2* | *05,9* | *05,9* | *00* | *03,3* |

<u>Commentaire</u>

Le maximum des fréquences ne se situe pas dans la même catégorie pour chacune des trois enseignantes : 20,3 % pour E1 en question d'information contextualisée ; 19,3 % pour E2 en

question d'argumentation contextualisée et 14,4 % pour E3 en accompagnement d'information contextualisée. Le seul point commun à ces maxima est la forme contextualisée du discours.
Nous avons doublé les bordures des cases du tableau qui présentent des fréquences dont les écarts entre enseignantes sont importants.
Nous avons grisé les cases du tableau qui présentent des fréquences dont les écarts entre enseignantes sont les moins importants.
Nous constatons que l'argumentation est la fonction du discours qui rapproche le plus et le plus souvent les trois enseignantes confirmant ainsi les constats que nous établissions en étudiant le tableau "fonction et forme des discours" (cf. 3).
Le relief donné au discours d'argumentation décontextualisé suit cette même règle, ainsi une fonction spécifique du discours apparaît globalement et avec un relief similaire pour les trois enseignantes.
Le même tableau "fonction et forme des discours" nous faisait remarquer que l'information contextualisé apparaissait dans le discours des enseignantes suivant des fréquences relativement proches. Nous constatons ici que la façon dont les enseignantes s'adressent aux élèves les distingue entre elles, le relief du discours dissocie les enseignantes : questions, accompagnements et réponses présentent des fréquences dont les écarts (entre enseignantes) sont importants ; l'approche de l'information est spécifique à chacune des enseignantes bien que dans l'ensemble, elles l'abordent aussi fréquemment.

## 8- Conclusion

Seule l'argumentation contextualisée est traitée de façon similaire par les trois enseignantes (cf. 3 et 7).

L'information apparaît fréquemment mais suivant un relief spécifique à chacune des enseignantes (cf. 7).

L'accompagnement contextualisé et les réponses décontextualisées jouent le même rôle pour les trois enseignantes (cf. 5) : ils occupent la même position au sein du discours.

Les questions contextualisées contribuent à distinguer les enseignantes entre elles (cf. 5).

Nous confirmons partiellement ce que nous constations pour la forme et la fonction des discours : tout se passe comme s'il y avait un "contenu mathématique minimum" à aborder obligatoirement dont les discours d'information contextualisé et d'argumentation décontextualisé étaient l'écho. Ce contenu minimum apparaît de la même façon pour les trois enseignantes.

Il semblerait que les enseignantes utilisent leurs connaissances de façon similaire lorsqu'il s'agit d'aborder les connaissances très ponctuelles que les élèves ont à acquérir. Les connaissances plus générales que les élèves ont à construire semblent constituer un point de distinction entre les enseignantes.

# CHAPITRE II

## Deuxième partie : analyse des passages décontextualisés

Nous abordons l'analyse des passages décontextualisés des discours des enseignantes. Les trois premières parties seront réservées à chacun des discours. La quatrième et dernière partie apportera une conclusion à l'ensemble du chapitre II où les éléments de conclusion de la première partie seront pris en compte.

Plan :

A- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E1

B- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E2

C- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E3

D- Conclusion des analyses des passages décontextualisés et des répartitions des unités de discours

## *A- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E1*

Le plan du cours de l'enseignante comporte essentiellement deux parties. Avec la première partie, la classe achève une activité entamée lors de la séance précédent celle enregistrée. Il s'agissait de « calculer la hauteur dans un triangle équilatéral ». La deuxième partie du cours introduit un thème apparemment nouveau : « application (des racines carrées) à la résolution d'équations du premier et du second degré »[2].

Nous avons déterminé 26 passages décontextualisés dont quatre portent abusivement ce nom, nous préciserons les motivations qui nous ont conduit à les retenir lorsque nous les étudierons.

Afin de rendre la lecture des analyses moins fastidieuse, nous avons déterminé trois types de conclusion auxquels nous parvenons pour la majorité des 26 passages. Certains passages ne sont pas caractérisés par l'une de ces conclusions, nous les exposons dans le premier paragraphe de nos analyses. Nous indiquons les 3 types de conclusion dans le second paragraphe et exposons les passages illustrant chacune des conclusions particulières. Le paragraphe 3 est réservé aux passages décontextualisés dont les conclusions empruntent à deux des trois types. La conclusion d'ensemble sera précédée du quatrième paragraphe : une histoire d'article.

### 1- Les passages non classés

Nous avons rassemblé dans ce paragraphe 8 passages. Les passages 1, 11, 12 et 13 sont des introductions d'activité, les passages 9 et 22 sont des conclusions d'activité, les passages 21, 24 et 26 relatent directement des activités.

**Passage 1** (rappel de l'activité entamée)

[2] Pour plus de détails sur le plan, nous renvoyons à la comparaison au manuel (chapitre suivant).

Les données sont les suivantes : ABC est un triangle équilatéral dont la longueur d'un côté est notée « a », H est le pied de la hauteur issue du sommet A. Il s'agit de calculer AH en fonction de la longueur d'un côté.

*Extrait :*

| | |
|---|---|
| • **On avait vu avant de partir le calcul de la diagonale d'un carré** | **SB** |
| • **et on avait commencé à calculer la hauteur dans un triangle équilatéral.** | **SB** |
| ~~calculer AH~~ | |
| • Alors vous savez | non classé |
| ~~On avait marqué HB c'est un demi de~~ | |
| o voilà | IC |
| il s'agissait de | non classé |
| ~~y'avait un deuxième a madame~~ | |
| ~~(inaudible)~~ | |
| • Il s'agissait de calculer | SB |
| ~~A~~ | |
| o AH | IC |
| ~~y'avait trois a, trois petits a~~ | |
| Ne parlez pas tous à la fois, Xavier | autre |
| ~~Sur le dessin y'avait trois petits a~~ | |
| (inaudible) triangle équilatéral. | non classée |
| ♦ Alors qu'est-ce que, qu'est ce qu'on a dit qu'on allait utiliser pour calculer la hauteur AH Hermine ? | AC |
| ~~par le théorème de Pythagore~~. | |
| o Voilà on pourra utiliser le théorème de Pythagore alors | |

<u>Commentaire</u>

Le passage 1 constitue une introduction au travail que va produire la classe. Il est essentiellement composé d'interventions classées en structuration. En rappelant deux des objectifs de la séance passée, l'enseignante rapporte celui qui n'avait pas été atteint (« on avait commencé... »). Les échanges avec les élèves permettent de préciser le point auquel la classe était parvenue et à partir duquel elle reprend les activités. Un triangle ABC supposé équilatéral est tracé au tableau. La hauteur issue du sommet A est représentée et son pied est noté H. Des lettres « a » sont inscrites pour désigner les longueurs des côtés [AB] et [AC]. L'objectif est de « calculer » la longueur de la hauteur [AH] en fonction de « a ». Plusieurs élèves parlent en même temps, ils indiquent spontanément des éléments de l'activité entamée et l'enseignante valide leurs propos. Sur sa demande, la seule qui leur soit adressée, les élèves rappellent l'outil qui va être utilisé pour la relation à établir. La question porte sur le théorème de Pythagore utile au calcul de la longueur AH, il ne s'agit pas de structuration. La structuration est donc prise en charge par l'enseignante dont la sollicitation aux élèves se réduit – ici – à un "comment faire" pour obtenir un résultat.

***Passages 9 et 11*** (conclusion et deuxième partie du cours)

*Extraits :*

Passage 9 (conclusion)

**• Alors on a calculé pour le cas général. Quand on vous donne un triangle équilatéral de côté a, la longueur de la hauteur ici, d'un sommet au pied de la hauteur, ça fera toujours a racine de 3 sur 2.**

**SB**

Passage 11 (deuxième partie du cours)

**• Alors maintenant donc les racines carrées, on a vu les applications à la géométrie SB**
**• et maintenant, on va voir les applications à la résolution d'équations du premier degré et du second degré. SB**
**• Alors c'est grand, c'est le grand 5. Grand 5 application à certaines équations. SB**
**• Alors équations du premier degré et après on verra du second degré. SB**

<u>Commentaire</u>

Ces deux passages sont constitués d'interventions classées en structuration. Le premier résume tout ce qui a été fait depuis le début de la séance, il permet à l'enseignante de donner la réponse à ce qui était cherché : « (calcul) de la (longueur) de la hauteur dans un triangle équilatéral ». Certains termes de cette intervention font apparaître une insistance sur le caractère général du résultat : « pour le cas général », « ça fera toujours... ». L'enseignante ne demande pas aux élèves de conclure ce caractère de leur travail.

Elargissons notre commentaire à un aspect du discours que nous évoquerons rarement : le découpage de l'exercice en sous-tâches. Les passages 2 et 3 (que nous exposerons plus loin) sont réservés au calcul de HB demandé par l'enseignante, les passages 4, 5, 6 et 7 (que nous exposerons plus loin) sont réservés au calcul de AH lui aussi demandé par l'enseignante.

Chacune des étapes nécessaires aux calculs de ces deux longueurs sont indiquées par l'enseignante et la participation des élèves se limite à la mise en œuvre de leurs connaissances d'un point de vue technique ou à la demande d'explication. Il ne leur est pas nécessaire de mobiliser leurs connaissances, l'enseignante se substituant à eux dans ces moments. Deux aspects importants de la mobilisation des connaissances constitués par le découpage en sous-tâches de l'activité proposée et la généralisation éventuelle sont ainsi pris en charge par l'enseignante.

Le passage 11 apparaît comme une transition entre la première partie du cours qui s'achève et la seconde partie. Il nous donne les principaux titres du cours de l'enseignante. Pour la première partie, nous rétablissons comme titre « application de la racine carrée à la géométrie » et pour la deuxième partie « application de la racine carrée à la résolution d'équation du premier et du second degré ». Cette deuxième partie est elle-même subdivisée en deux parties dont nous pouvons rétablir les titres : pour la première subdivision « application de la racine carrée à la résolution d'équations du premier degré » et pour la deuxième « application de la racine carrée à la résolution d'équations du second degré ». Nous commenterons le titre de la première des deux subdivisons par la suite.

Nous ne retiendrons de ces passages que la totale prise en charge par l'enseignante de la structuration et du découpage de l'activité en tâches et en sous-tâches. Nous retiendrons également les titres qu'elle donne aux principales parties du cours.

***Passages 12, 22 et 23*** (description, conclusion et introduction)

*Extraits :*

Passage 12 (description)

♦ **Quand je dis du premier degré, ça veut dire quoi Laurent, c'est des équations de quel genre ? définition IT**
~~(inaudible)~~

o **Avec une inconnue** **définition IT**

♦ **et ?** **définition IT**

*

o **Voilà y aura pas de carrés, y aura que des x** **définition IT**

(bruit)

• **Quand on sera au second degré, y aura des x carrés.** **définition IT**

Passage 22 (conclusion)

**• D'accord donc voilà en fait, soit on résoudra des équations à (inaudible) soit ça sera dans un contexte d'accord avec un petit énoncé.** **SR**

Passage 23 (suite)

**• Deuxième exemple, deuxième exemple alors ça va être un petit peu plus particulier** **autre I**
Exemple numéro deux non classé
**• alors là c'est directement une équation, ça sera pas dans un contexte particulier** **SB**

Commentaire

Le passage 12 n'est pas de même nature que les autres, l'enseignante décrit un objet mathématique, elle ne décrit pas une procédure d'écriture. Elle ne qualifie pas non plus par des titres ce qui a déjà été vu ou bien va l'être, ici l'enseignante sollicite les élèves et les laisse parler, exposer leurs connaissances. Ce passage est le seul où il en est ainsi.

Nous ne commenterons les passages 22 et 23 que pour dire que l'enseignante se livre également à une description de la "catégorie" dans laquelle s'inscrit l'exercice achevé « équation dans un contexte » (passage 22) et celui dans laquelle s'inscrit l'exercice suivant « équation sans contexte » (passage 23).

***Passage 21*** (la vérification)

**♦ Alors qu'est-ce qu'on a oublié là ?** **habitude I**
~~Ben rien.~~
**♦ Si, c'est une équation** **habitude I**
~~La vérification~~
**o La vérification** **IC**

Commentaire

Nous commentons dans la comparaison au manuel (cf. chapitre III, §3.2.1.2) le passage 21 dont nous n'indiquons ici que le début. Notre conclusion est que les propos de l'enseignante peuvent entraîner une confusion chez les élèves.

*Passage 24* (résolution d'une équation : première étape)

| | |
|---|---|
| • alors x racine de 3 moins 5 égal x racine de 12 plus x $(x\sqrt{3}-5=x\sqrt{12}+x)$ | énoncé I |
| ♦ Alors B, on t'écoute. | AP |
| ~~On met les x d'un côté et les nombres de l'autre.~~ | |
| **o Voilà quand on a vu la résolution des équations du premier degré, on met – entre guillemets – tous les x d'un côté et tous les nombres de l'autre** | **AM** |
| ♦ alors ça va nous donner quoi B. ? | AC |
| ~~x racine de 3 moins x~~ | |
| ♦ Alors ? | répétition AC |
| ~~x le premier~~ | |
| ~~on a x racine de 3~~ | |
| o Oui | IC |
| ~~Le premier celui-là qui est là~~ | |
| ~~moins x~~ | |
| **o Alors on met tous les x d'un côté** | **AM** |
| ~~Ah oui x moins 3 non x racine de 3 euh~~ | |
| ~~moins x racine de 12~~ | |
| ~~moins x racine de 12~~ | |
| o Voilà | IC |
| ~~moins x~~ | |
| o Voilà moins x. | IC |
| **o Tous les paquets en x, tous les paquets où on a des x** | **répét. AM** |
| o donc c'est x racine de 3 moins x racine de 12 et moins x est égal à | IC |
| ~~5~~ | |
| o Plus 5 | IC |

Commentaire

Ici l'enseignante explique ou rappelle en utilisant différents termes, comment résoudre une équation : « tous les x d'un côté et tous les nombres de l'autre », « tous les paquets en x, tous les paquets où on a des x ». Nous avons donc classé ces interventions en discours de méthode (AM). Elles constituent une répétition des propos d'un élève « on met les x d'un côté et les nombres de l'autre » qui répondait à une question de l'enseignante « alors B. on t'écoute ». Les explications peuvent être reliées aux interventions de l'enseignante des passages 16 et 17 où nous verrons que l'enseignante rappelle la compatibilité de la relation « = » avec les opérations. Sa terminologie appartient au langage familier : « tous les paquets ». Elle pourrait mettre en évidence le contenu des deux membres de l'équation – précisément le second – afin de reconnaître leur constitution pour en déduire l'opération à effectuer qui permettra de « mettre tous les x » ou « tous les paquets en x » dans le même membre de l'équation. Puisque les élèves répondent facilement, cela ne constituerait qu'une lourdeur. Nous ne conclurons donc rien de particulier.

***Passage 26*** (résolution d'une équation : troisième et dernière étape)

| | |
|---|---|
| ~~Madame~~ | |
| • alors maintenant quand | non classé |
| ~~vous n'avez pas terminé là~~ | |
| **o non c'est pas terminer, si je trouver x maintenant** | **SE** |
| ~~il faut~~ | |
| ♦ qu'est ce que je dois faire ? | AC |
| ~~il faut passer les parenthèses de l'autre côté~~ | |
| ~~tu passes tout de l'autre côté~~ | |
| o oui | IC |
| o alors tu passes comment quelle opération tu fais | AC |
| ~~moins~~ | |
| ~~non plus eh oh plus, plus~~ | |
| ~~c'est multiplié tu divises~~ | |
| ♦ Lucie ? | non classé |
| ~~moins racine de 3 moins un la parenthèse divisée par 5~~ | |
| o Ah non c'est l'inverse | AC |
| • si tu avais fois 2 égal 5 d'accord tu fais 5 divisé par 2. donc là tu fais divisé par moins racine de 3 moins un d'accord, tu divises pas puisque (inaudible) | AP |

Commentaire

L'équation à résoudre était :

$$x\sqrt{3}-5=x\sqrt{12}+x$$

la classe l'a transformée en :

$$x(-\sqrt{3}-1)=5$$

Dans le passage 16 (cf. infra §II-2), avec l'exemple ($\frac{x\sqrt{3}}{2}=5$), nous verrons apparaître un « genre d'équation » qui ne sera pas précisé ; finalement après quelques essais infructueux, les élèves la résoudront. L'équation à résoudre ici est du même « genre » mais l'enseignante ne s'y réfère pas. Sur sa demande « si je veux trouver x maintenant qu'est ce que je dois faire ? » les élèves indiquent qu'il faut « passer les parenthèses de l'autre côté » puis précisent – toujours sur sa demande – l'opération à effectuer. Cette précision apparaît pour la première fois ici, aucune justification ne lui est associée – sauf de la part d'un élève, remarque que l'enseignante ne relève pas malgré les erreurs des autres – seul le résultat semble importer.

Nous trouvons ici plusieurs conclusions auxquelles l'étude des autres passages nous conduiront : les connaissances de niveau (n+p) ne sont pas beaucoup sollicitées, les connaissances que nous déduisons du discours de l'enseignante ressemblent à celles que les élèves doivent pouvoir mettre en œuvre, ce n'est que les résultats qui semblent mis en avant et non la manière dont on les obtient.

Tout se passe comme si l'enseignante écartait de son intention didactique l'accès des élèves à un niveau mobilisable ou disponible de leurs connaissances, elle allège le projet didactique.

***Passage 15*** (la/une hauteur)

| | |
|---|---|
| ~~Ah c'est général.~~ | |
| Hein ? | non classé |
| ~~La hauteur.~~ | |
| o **T'as trois hauteurs alors tu peux pas dire, dans un triangle tu as trois hauteurs, tu peux pas dire** | **AP** |
| ~~Ici c'est la même.~~ | |
| o **On dit la hauteur issue... une parmi les trois.** | **AP** |

***Passage 20*** (un/le côté)

| | |
|---|---|
| ~~C'est une des longueurs~~ | |
| o **Oui mais le côté c'est le même partout** | **AP** |
| o donc la longueur, la longueur du côté du triangle équilatéral vaut 10 racine de 3 sur 3. | IA |

<u>Commentaire</u>

Nous commenterons les passage 15 et 20 dans la partie « une histoire d'article ».

## 2- Définitions des types de conclusion I, II et III et exemples

### *2.1- Le type I*

### 2.1.1- Définition du type I

Nous dirons qu'un passage est du type I lorsque nous pouvons conclure ce qui suit : le texte de préparation du cours de l'enseignante est très présent en classe, il semble l'empêcher d'adapter son discours aux propos des élèves. Les connaissances propres de l'enseignante de niveau (n+p) ne servent pas directement en classe.

### 2.1.2- Les passages de type I

***Passage 2 et 3*** (calcul de HB)

Ces passages se situent en début de cours. ABC est un triangle équilatéral, H est le pied de la hauteur issue du sommet A, la longueur CB est repérée par la lettre a.

*Extraits :*

Passage 2

| | |
|---|---|
| ~~c'est un demi de CB~~ | |
| o Voilà | IC |
| ◆ alors ça vaut combien HB ? | IA |
| ~~Ben la moitié de a~~ | |
| ~~a divisé par deux~~ | |
| ◆ Alors je vais l'écrire comment ? | notation I |
| ~~a sur deux~~ | |
| ~~a demi~~ | |
| ~~a sur deux~~ | |
| o Voilà a sur deux | IC |
| ◆ pourquoi ? | AP |
| ~~Parce que (inaudible) la moitié parce que la hauteur coupe en demi~~ | |
| o Oui | IC |
| ◆ pourquoi ? | AP |

| | |
|---|---|
| ~~(inaudible) équilatéral (inaudible)~~ | |
| **o Voilà dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi** | **IC** |
| ~~**Médiane**~~ | |
| **o Voilà médiane** | IC |
| **♦ et ?** | **propriété IT** |
| ~~**Médiatrice**~~ | |
| **o et médiatrice voilà** | **IC** |
| o donc automatiquement ici H va être le milieu de CB | AP |
| o donc ici la haut... la distance HB c'est bien a sur deux. | répétition IC |
| • On va écrire donc | SR |
| • première chose, on va dire que H est le milieu de CB. | SE (SR) |
| **• Alors dans un triangle équilatéral ... la hauteur... issue d'un sommet... est aussi** | **propriété IT (SR)** |
| ~~Médiatrice~~ | |
| **o Voilà la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du coté opposé oui.** | **répét., propriété IT (SR)** |

Passage 3

| | |
|---|---|
| ~~donc CH égal HB~~ | |
| pardon | non classé |
| ~~CH égal HB~~ | |
| CH ? | non classé |
| o oui CH égal HB (CH = HB) c'est ça | IC |
| • puisque la hauteur est aussi médiatrice ça veut dire qu'elle coupe | répétition AP (SR) |
| ~~le segment~~ | |
| o oui le segment [BC] | IC |
| ~~en son milieu~~ | |
| o en son milieu voilà | IC |
| • donc la hauteur issue de A coupe le segment [BC] en son milieu… | propriété IT |
| • donc on a CH égal HB, CH égal HB égal | IA |
| ~~a demi~~ | |
| ~~a sur deux~~ | |
| • a sur deux ou on dit un demi de a mais on ne dit pas a demi | terminologie I |

Commentaire du passage 2

Le but de ce passage est d'établir que le point H est milieu du segment [CB]. Sur demande de justification de l'enseignante (« pourquoi »), un élève indique pourquoi il a dit « a sur 2 » en expliquant que la « hauteur coupe en demi » puis en complétant par « médiane » la propriété que l'enseignante commençait à énoncer :

« E- a sur deux
« P- Voilà a sur deux pourquoi ?
« E- Parce-que (inaudible)
« E- la moitié parce-que la hauteur coupe en demi
« P- Oui pourquoi ?

« E- (inaudible) équilatéral (inaudible)
« P- Voilà dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi
« E- Médiane »

Ainsi, l'élève explique l'objet de son intervention « a sur 2 » par une propriété « dans un triangle équilatéral, la hauteur est aussi médiane ». La mention du mot « médiane » n'est pas suffisante à l'enseignante qui appelle aussi le mot « médiatrice » :

« P- Voilà médiane et ?
« E- Médiatrice
« P- et médiatrice voilà »

Nous formulons deux hypothèses à cette demande. La première est qu'elle attendait le mot « médiatrice » et a voulu le faire dire aux élèves : en quelque sorte, l'enseignante attend un texte, une justification qu'elle avait préparé(e) et s'y tient. La deuxième hypothèse est que l'enseignante veut savoir si les deux mots « médiane » et « médiatrice » sont disponibles pour les élèves. Nous ne retiendrons pas la deuxième hypothèse. En effet, l'objet du cours ne porte pas à ce moment sur les droites particulières dans le triangle et la justification à produire ne nécessite pas de privilégier la médiatrice à la médiane (même pour la suite de l'activité), rien n'incite particulièrement à donner de l'importance à ce point. Ainsi, l'enseignante pouvait accepter la proposition de l'élève de ne citer que « médiane » néanmoins, elle ne retient et n'exploite des propositions des élèves que celles indiquant médiatrice. D'autre part, pour rédiger la réponse à la question, l'enseignante fait noter aux élèves : « dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du côté opposé » sans autre commentaire. Le mot « médiatrice » est donc privilégié et le mot « médiane » n'est pas commenté pour signifier à la classe que la proposition pouvait elle aussi, être retenue. Ainsi, l'enseignante ne profite pas des propos des élèves et son discours ne les met pas en relief. Vérifier que les deux termes médiane et médiatrice sont disponibles et ne retenir que « médiatrice » pourrait se traduire par une phrase ou un commentaire indiquant que puisque dans le triangle équilatéral les droites relatives à un même côté sont confondues, il revient au même d'employer l'une ou l'autre. Bien que reconnaissant des propos corrects chez les élèves, l'enseignante n'adapte pas ses propos à la classe.

Maintenant, posons la question du choix effectué. D'un point de vue "didactique" nous répondrons que l'enseignante "profite" de la situation où l'attention est focalisée sur la hauteur [AH] et sur le point H d'intersection avec le côté [BC]. En ce point, la hauteur est perpendiculaire au côté. Or, les élèves connaissent une autre droite du triangle elle aussi perpendiculaire à [BC] qui est la médiatrice. Ainsi, la propriété "droite perpendiculaire au côté" commune à la médiatrice et à la hauteur peut justifier de mobiliser la médiatrice alors que la hauteur était la donnée de départ. Ce point de vue met en jeu le segment [BC], les droites particulières du triangle et semble mobiliser une propriété commune à deux d'entre elles. Nous pouvons avancer un autre "point de vue". Montrer que H est le milieu du segment [CB] revient à montrer qu'il est équidistant des points C et B et que les trois points sont alignés. Les élèves connaissent un ensemble dont les éléments possèdent cette caractéristique : la médiatrice. Par ailleurs, la médiatrice est perpendiculaire au segment [CB] tout comme la hauteur : nous rejoignons le premier point de vue ; il semble raisonnable de penser à la médiatrice. Ce petit développement autour du point H n'apparaît pas dans les propos de l'enseignante : par conséquent, le "milieu" ne semble pas le point de départ de son raisonnement. De plus, dans un triangle quelconque la hauteur n'intercepte pas toujours en son milieu le côté opposé au sommet dont elle est issue. Le milieu du segment n'incite donc pas particulièrement à se référer à la hauteur. Ainsi, l'association "spontanée" de la hauteur et de la médiatrice semble due à un autre élément que le milieu[3].

Un troisième point de vue est celui que les élèves semblent approcher : le pied de la hauteur appartient à toutes les droites particulières interceptant le même côté d'un triangle équilatéral puisque ces droites sont confondues. Il suffit alors de choisir... Ce point de vue met en jeu les droites particulières du triangle et mobilise une propriété du triangle équilatéral, propriété nécessaire à la conclusion des deux premiers points de vue.

Pour un observateur, tout se passe comme si l'enseignante privilégiait un élément non particulier à la situation[4] pour ensuite déduire la réponse attendue qui nécessite, *in fine*, l'utilisation d'un élément spécifique à la situation : « dans un triangle équilatéral la hauteur (...) est aussi médiatrice (...) ». Cette procédure nécessite d'isoler un élément du cadre dans lequel se trouve la

---

[3] En approfondissant les deux points de vue cités, nous aboutissons à ceci : tout se passe comme si le triangle était vu comme la région du plan limitée par une ligne brisée fermée constituée de trois segments et comme si une partie de cette ligne – le segment [BC] – était isolée et étudiée séparément. Le triangle n'est pas oublié, il intervient par la hauteur. Un cadre apparaît constitué de deux parties : le triangle ABC et la hauteur [AH] d'une part, le segment [BC] et sa médiatrice d'autre part. Une caractéristique réunit ces deux parties : la hauteur et la médiatrice sont perpendiculaires à [BC]. L'association "spontanée" de la hauteur et de la médiatrice peut alors sembler due à une caractéristique qu'elles possèdent en commun.

[4] Dans tout triangle deux droites particulières sont perpendiculaires au côté qu'elles interceptent : la hauteur issue d'un quelconque des sommets et la médiatrice du côté opposé à ce sommet.

classe. Elle concurrence l'approche des élèves qui privilégie l'élément spécifique de la situation "triangle équilatéral". Pour un observateur l'approche de l'enseignante provoque une surcharge de travail et donne l'impression que la hauteur a provoqué une "pollution".

Les deux interventions classées en discours contextualisé :

« on va écrire donc

première chose, on va dire que H est le milieu de CB »

ne sont que des répétitions d'autres interventions, elles indiquent aux élèves le début du développement à effectuer pour produire le résultat HB = a/2. Au cours de ce passage les élèves ont successivement précisé la valeur de HB, donné un argument pour étayer leur réponse et remplacé cet argument par un autre. Chacune de ces actions répondait à un questionnement précis de l'enseignante, questionnement que nous pourrions qualifier de ponctuel. Enfin, l'enseignante reconstitue elle-même le raisonnement structurant les différentes demandes adressées aux élèves. De la sorte la classe n'est consultée que sur des points isolés du raisonnement, l'enseignante prend en charge l'organisation du raisonnement et sa rédaction : de même que la structuration qui permettait d'introduire l'activité était du côté de l'enseignante, la structuration de l'écrit mathématique et du raisonnement est également de son côté.

Nous retiendrons de ce long commentaire une hypothèse et un constat. L'hypothèse est la suivante : l'enseignante s'en tient exclusivement au texte de cours qu'elle a préparé. Nous relevons alors deux glissements :

1- ce texte de préparation contraint l'enseignante qui n'arrive pas (encore) à l'adapter aux propos des élèves,

2- l'enseignante ne réagit pas à une surcharge de ce texte que nous pouvons interpréter comme une "pollution" provoquée par l'élément « hauteur ».

Le constat est le suivant :

- l'enseignante n'exerce pas l'un des avantages que peuvent lui permettre ses connaissances de niveau (n+p) que nous introduisons ici comme la capacité à critiquer ce qui est produit (y compris par elle) et l'adaptation à des cadres plus "légers",

Finalement nous assistons à deux discours qui se répondent, l'un émis par les élèves, l'autre émis par l'enseignante, leurs conséquences sont les mêmes, les outils qu'ils nécessitent sont différents et l'enseignante choisit de retenir son discours.

Commentaire du passage 3

Avec les passages 2 et 3 les élèves montrent qu'ils savent que lorsqu'un point est le milieu d'un segment, il détermine deux segments de même longueur (« CH = HB »), qu'une de ces longueurs est la « moitié » de la longueur du segment de départ ce qui conduit à une écriture sous forme de fraction « a sur deux ». Le début du passage 3 est un début de transformation de cette connaissance en un petit raisonnement où des propriétés algébriques sont à manipuler. Le raisonnement est interrompu par l'enseignante, il faut alors "deviner" comment passer de l'écriture en fonction de H, B et C à celle en fonction de a (cf. la comparaison au manuel où nous étudions ce passage).

La médiatrice confondue à la hauteur permet de préciser que celle-ci intercepte le segment [CB] en son milieu : « puisque la hauteur est aussi médiatrice ça veut dire qu'elle coupe (...) le segment [BC] en son milieu » ce qui explique CH = HB. L'enseignante justifie par une propriété ce que dit l'élève : nous voyons deux discours se compléter. La justification apportée, l'enseignante conclut « CH = HB = a/2 ». Il n'y a pas trace de la suite du raisonnement conduisant à HB = a/2. Ce résultat était d'ailleurs connu dès le passage 2. Cependant, l'enseignante a porté une attention particulière à l'écriture du résultat sous forme de fraction (cf. comparaison au manuel), elle n'apporte pas la même attention au raisonnement qui conduit à ce résultat[5] : on voit "comment on écrit en mathématique" mais pas "pourquoi on écrit ainsi". Nous retrouvons la situation du passage 2 : deux discours qui se complètent coexistent en classe. Les mêmes protagonistes occupent les mêmes rôles. L'un des protagonistes – les élèves – semble même contraint par l'autre – l'enseignante – à tenir son rôle. Cette fois, l'autre protagoniste ne développe pas totalement le sien : une partie du raisonnement mathématique est écartée.

Finalement les passages 2 et 3 nous autorisent à formuler le point suivant.

- L'enseignante argumente à la place des élèves pour justifier ce qu'ils disent même si eux-mêmes peuvent produire l'argumentation.

[5] Cette situation semble étonnante puisque les élèves donnent l'impression de produire un raisonnement où l'utilisation du terme fraction est justifié, laissant d'ailleurs apparaître la relation d'équivalence qui définie une fraction (même si ce n'est pas au programme).

Ainsi, nous trouvons une petite confirmation de notre hypothèse provisoire : tout se passe comme si l'enseignante avait préparé un texte de cours, qu'elle s'y tenait et ne saisissait pas les opportunités offertes par les élèves de l'adapter à leurs réactions, voire de "l'alléger" en changeant de cadre.

Tout se passe comme si la dévolution aux élèves que l'enseignante effectue ne portait que sur l'énoncé par les élèves de certains résultats locaux. De la sorte les élèves ne sont pas appelés à structurer leurs connaissances et ils ne pas appelés à produite un raisonnement "complet".

***Passage 13*** (mise en équation d'un problème)

• Alors premier exemple. SB

• La hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5 centimètres. Trouver x la longueur du côté. énoncé I

(silence)

♦ Alors quelqu'un a une idée ? AP

~~C'est égal 5 (inaudible) sur 2.~~

o oui alors d'accord c'est ça IC

♦ mais si on met x la longueur du côté, qu'est-ce qui faut écrire, qu'est ce qu'on va écrire, on va écrire (inaudible) pas directement ? AP

~~Ben soit x la longueur du côté~~

♦ **Voilà alors, ça s'appelle une... ?** **définition IT**

♦ **une é... ?** **répét. définition IT**

~~équation.~~

o **Voilà on va essayer d'écrire une équation** **SE**

<u>Commentaire</u>

L'enseignante a séparé son cours en deux parties « application des racines carrées à la géométrie » puis « application des racines carrées à la résolution d'équations ». La deuxième partie est elle-même subdivisée en 2, le titre de la première subdivision est « équations du premier degré » (cf. supra §I passage 11). La dernière activité de la première partie portait sur le triangle équilatéral[6]. Le passage 13 qui est la première activité de la deuxième partie (première subdivision) porte aussi sur le triangle équilatéral. Les deux parties introduites par des titres distincts mettent en jeu les mêmes thèmes : le triangle équilatéral et une résolution d'équation. Evidemment, nous pouvons trouver des liens entre la racine carrée, la géométrie et la résolution

[6] Rappelons que cette dernière activité est celle qui débute la séance que nous observons.

d'équation : la racine carrée autorise la représentation numérique de certaines longueurs – nouveaux nombres – qui ne s'expriment pas à l'aide des autres « nombres connus » – entiers ou rationnels – en classe de quatrième. La racine carrée permet l'expression de solution d'équations qui n'en possédaient pas dans l'ensemble des nombres rationnels et qui peuvent provenir de la géométrie et, la géométrie peut être utilisée pour « montrer » que des nombres qui ne s'expriment qu'à l'aide de radicaux existent et ont le même sens que les autres par le fait qu'ils peuvent eux aussi préciser la longueur de segments. L'activité de la première partie permet l'une et l'autre, représentation numérique d'une longueur ($h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$) et résolution d'une équation qui ne possède pas toujours de solution dans l'ensemble des rationnels ($h^2 = \frac{3a^2}{2}$). Dans ce sens, le premier titre décrit le contenu traité.

Le titre de la deuxième partie du cours qualifie de la même façon le rôle que la racine carrée aura à jouer pour les équations du premier et du second degré. Nous entendons dans ce titre « application des racines carrées à la résolution d'équations » l'aspect outil de la racine carrée appliquée à la recherche de solutions. Ainsi, nous interprétons le titre de la première subdivision « application des racines carrées à la résolution d'équations du premier degré » comme la mise en œuvre de l'outil « racine carrée » pour trouver une solution à une équation du premier degré. En fait, l'enseignante propose une activité qui nécessite l'application technique du résultat précédemment trouvé (relation numérique entre les longueurs des hauteurs et des côtés dans le triangle équilatéral). Cette application va entraîner les élèves à manipuler les propriétés opératoires des racines carrées et non de trouver une solution en faisant fonctionner l'outil « racine carrée » : l'enseignante propose une manipulation de l'objet racine carrée et non de l'outil. En cela le titre ne décrit pas le contenu traité. Nous nous demandons s'il était nécessaire de distinguer deux parties, de subdiviser la deuxième en deux et de donner comme exemple pour la première des subdivisions une activité qui aurait pu être étudiée en première partie. En considérant l'exemple du triangle équilatéral exploité suivant deux points de vue : application de l'outil puis de l'objet racine carrée, nous avons l'impression que l'enseignante voulait illustrer des titres dont la teneur pourraient être « racine carrée et géométrie » pour la première partie et

« racines carrées et résolution d'équations » pour la deuxième partie. Le titre de l'enseignante nous semble donc inadéquat.

Ce deuxième titre « application des racines carrées à la résolution d'équations du premier degré » laisse entendre qu'il y aura des équations à résoudre. Nous avons l'impression qu'il influence les questions de l'enseignante puisqu'elle entraîne directement les élèves à préciser qu'ils vont écrire une équation :

> « mais si on met x la longueur du côté, qu'est-ce qui faut écrire, qu'est ce qu'on va écrire, on va écrire
> (...) pas directement ?
> voilà alors, ça s'appelle une... ?, une é...? ».

Un élève répond « soit x la longueur du côté » à la première question de l'enseignante. Cette réponse appartient au registre de la rédaction de la solution au problème, l'élève précise ce qu'est x. La précision semble cohérente avec la demande de l'enseignante qui ne refuse pas la réponse, mais ne la commente pas, elle dévoile une partie ce qu'elle attendait : « ça s'appelle une...?, « une é...? ». La question qui semblait porter sur la précision à apporter concernant x était en fait de savoir comment se nomme ce qui sera finalement une traduction de l'énoncé par des symboles mathématiques. L'état d'avancement de la résolution du problème posé permet difficilement une telle réponse. Ici, l'enseignante anticipe le travail de la classe en précisant un élément important du problème à résoudre. Une tâche est ainsi dévoilée. Nous avons l'impression qu'elle s'en tient à un scénario fixé dont elle s'écarte difficilement même si elle peut noter que les élèves ne répondent pas comme elle attendait qu'ils le fassent.

Finalement, cette première activité de la deuxième partie est très liée à la première partie puisqu'elle nécessite l'application du résultat qui avait été trouvé. Elle est aussi très liée à la suite puisqu'elle introduit le thème « résolution d'équation », thème support de la deuxième partie. Notre commentaire nous laisse penser que cette activité joue le rôle de transition entre ce qui précède et ce qui va suivre.

Nous notons donc une tentative de l'enseignante de lier les contenus des différentes parties de son cours. Toutefois, nous remarquons un titre inadéquat et la contrainte que semble constituer la préparation du cours, contrainte qui se traduit par la définition et le maintien des tâches à effectuer indépendamment des propos des élèves. Ceci laisse penser que les connaissances de l'enseignante n'ont pas suffisamment joué pour éviter la non-concordance du titre et du contenu et qu'elles ne sont pas toujours mobilisées aux moments opportuns notamment pour s'adapter à la classe.

## *2.2- Le type II*

### 2.2.1- Définition du type II

Nous dirons qu'un passage est du type II lorsque nous pouvons conclure ceci : la situation de la classe laisse penser que les connaissances des élèves sont suffisantes pour résoudre ce qui leur est proposé. Les interventions de l'enseignante conduisent les élèves à ne pas mettre en œuvre leurs connaissances : elle les remplace au lieu de s'adapter aux élèves pour qu'ils consolident leurs connaissances (en essayant par exemple de les rendre mobilisables ou disponibles) ou pour qu'ils en construisent d'autres. Tout se passe comme si l'enseignante les entraînait à n'utiliser que le niveau technique de celles dont ils disposent.

### 2.2.2- Les passages de type II

***Passage 14*** (utilisation d'un résultat)

• alors pour trouver l'équation donc x représente le côté pour trouver l'équation, on doit calculer la hauteur en fonction de x d'accord et on sait qu'elle sera égale à 5 ainsi, on pourra écrire l'équation AM

~~Ah ouais~~

♦ **Alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur ? propriété IT**

~~La hauteur ?~~

o **Oui. IC**

~~Egal a racine de 3 sur 2.~~

o **Voilà IC**

• **donc on l'écrit ici, propriété... on commence par citer la propriété, dans un triangle équilatéral de côté x... la hauteur mesure x racine de 3 sur 2. SR**

<u>Commentaire</u>

L'enseignante décrit ce qui va être écrit et le raisonnement à suivre :

« alors pour trouver l'équation donc x représente le côté, pour trouver l'équation on doit calculer la hauteur en fonction de x et on sait qu'elle sera égal à 5 ainsi, on pourra écrire l'équation ».

La description est suivie d'une question très précise qui laisse peu de possibilité de recherche aux élèves :

« alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur ? ».

L'enseignante précise à l'aide de cette question qu'il faut utiliser les connaissances sur la relation entre la hauteur et le côté dans un triangle équilatéral. Ce faisant, elle effectue un travail qui pourrait être celui des élèves consistant à remarquer qu'il y a un lien entre le contenu de l'exercice et la propriété qu'ils ont établie en première partie de cours. En remarquant ce lien, les élèves pourraient proposer eux-mêmes d'appliquer cette propriété. Enfin, la longueur du côté est donnée « alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral » (dans la propriété la longueur du côté était « a ») et à partir de cette longueur il s'agit d'exprimer la longueur de la hauteur (dans la propriété, cette longueur était appelée « h »). De cette façon, les élèves n'ont plus qu'à rappeler la relation ($h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$) qu'ils ont vue quelques instants auparavant en remplaçant « a » par « x ».

Les élèves rappellent effectivement la propriété mais ne remplacent pas « a » par « x » :

« E - la hauteur ?

P - oui

E - égal $a\frac{\sqrt{3}}{2}$

P - voilà ».

L'enseignante remplace elle-même « a » par « x » : « dans un triangle équilatéral de côté x la hauteur mesure $x\frac{\sqrt{3}}{2}$ », ce travail n'est pas laissé aux élèves alors qu'il s'agit d'une adaptation importante.

Finalement, dans ce passage, l'activité des élèves est réduite à l'énoncé du texte d'une propriété initiée par l'enseignante. Ils ne sont pas sollicités pour mettre en relation l'exercice et cette propriété. Ils ne le sont pas non plus pour remplacer « a » par « x » c'est-à-dire pour contextualiser (ou adapter) la propriété à l'exercice.

Dans cette approche, nous avons l'impression que l'enseignante "joue" à l'élève en indiquant ce qu'il devrait dire et faire. Elle joue à l'élève en situation didactique en explicitant les éléments sur lesquels s'appuie la situation. Elle livre à la classe les éléments didactiques de la situation :

- la structuration des connaissances impliquées dans la résolution,

- le découpage de l'activité en sous-tâches,

- l'adaptation d'une propriété aux données de l'exercice.

De la sorte, l'enseignante ne s'adapte pas aux élèves, elle les remplace et au lieu de les entraîner à construire leurs connaissances, elle les entraîne à n'utiliser que le niveau technique de celles dont ils disposent.

***Passage 16*** (calculs)

♦ Alors une hauteur mesure x racine de 3 sur 2, dans le cas précis combien on peut calculer ? IA

~~5~~

o Voilà donc on va avoir donc hauteur x racine de 3 sur 2 égal 5. IC

♦ Ici comment fait-on pour résoudre ce genre d'équation ? AM

~~On fait 5 moins non est égal à zéro.~~

o oui on peut. IC

♦ On peut faire plus facilement. Cécile ? répétition AM

~~On fait x racine 3 par 2 est égal~~

o Oui d'accord IC

♦ est-ce que quelqu'un d'autre a une idée ? répétition AM

o Caroline voilà directement x racine de 3 égal 10 ($x\sqrt{3} = 10$) c'est ce que disait Cécile mais en plus simple. IC

o Ici lorsqu'on a une égalité, on réduit au même dénominateur de chaque côté AM

o donc ça nous donne x racine de 3 sur 2 égal 10 sur 2 . IA

~~Pourquoi, comment ?~~

~~Pourquoi égal 10 ?~~

Pourquoi égal 10 ? autre

o Alors quand tu réduis au même dénominateur ici et là, 5 c'est comme si tu avais 5 sur 1, 10 sur 2 AP

♦ et comme j'ai le même, quelle est l'opération que je fais ? AP

♦ je multiplie toute l'équation par ? IA

~~2~~

o 2, je multiplie toute l'équation par 2. IC

o Donc je vais avoir x racine de 3 égal 10 (oui, non ?) AP

• Ici quand je multiplie toute l'équation par 2, 2 fois ça sur 2, il me reste x racine de 3 et 2 ça fait 10 (oui ?) AP

Commentaire

Ce passage ne présente pas d'interventions classées en discours décontextualisé. Cependant, nous l'indiquons car certaines phrases en sont proches :

« ici comment on fait pour résoudre ce genre d'équations ? »
« alors quand tu réduis au même dénominateur ici et là, 5 c'est comme si tu avais 5 sur 1, 10 sur 2 »
« et comme j'ai le même, quelle est l'opération que je fais ? »
« je multiplie toute l'équation par ? »

La première de ces phrases invite les élèves à reconnaître « un genre d'équation » et à lui associer une technique de résolution. L'enseignante attend le résultat de l'application de la technique « Caroline voilà directement ($x\sqrt{3}=10$) » qui n'est d'ailleurs pas compris de tous les élèves. Auparavant côté élèves, une première « technique » infructueuse est tentée « on fait 5 moins non est égal à zéro ». L'enseignante en appelle une autre qui trouve un écho (Caroline et Céline), quelques élèves sollicitent des explications : « pourquoi, comment ? », « pourquoi égal 10 ? » qui conduisent l'enseignante à développer la « technique » qu'elle attendait. Nous abordons ainsi les autres interventions que nous n'avons pas indiquées en discours décontextualisé.

> « alors quand tu réduis au même dénominateur ici et là, 5 c'est comme si tu avais 5 sur 1, 10 sur 2 »
> « et comme j'ai le même, quelle est l'opération que je fais ? »
> « je multiplie toute l'équation par ? »

Le « genre d'équation » qui engendre les calculs reste implicite. Nous voyons apparaître la notion de compatibilité de la relation « = » avec l'une des quatre opérations que l'enseignante approche avec la question « je multiplie toute l'équation par ? ». Cette question qui répond à la demande d'un élève dévoile la notion de compatibilité et ne laisse à l'élève que le choix du nombre par lequel multiplier. La raison pour laquelle il faut multiplier est en partie indiquée par l'enseignante : « et comme j'ai le même (dénominateur), quelle est l'opération que je fais ? ».

Ce passage explicite totalement le début de la résolution de l'équation, il ne laisse pas la possibilité à l'élève de trouver par lui-même la raison des calculs. Nous constatons une situation semblable à celle des passages 7 et 8 où l'enseignante précisait l'aspect "technique" de la racine carrée au lieu d'entraîner les élèves à mobiliser leurs connaissances pour l'appliquer. L'enseignante n'entraîne pas les élèves à mobiliser leurs connaissances sur les résolutions d'équations.

L'exercice en cours de résolution doit illustrer le titre « application de la racine carrée à la résolution d'équations ». Le commentaire que nous venons d'effectuer se rapporte à la deuxième partie du titre : « résolution d'équations ». En effet, nous interprétons « résolution d'équations » par la mise en œuvre des propriétés algébriques y afférent[7].

[7] Pour les équations du second degré nous pouvons classer les propriétés algébriques en trois parties. D'une part, application technique de l'outil « racine carrée », d'autre part application des propriétés de compatibilité de la relation « = » avec les opérations et applications des autres propriétés des lois de compositions du corps (R, +, x), enfin propriétés algébriques de la racine carrée. Les deux dernières parties s'appliquent aussi pour les équations du premier degré.

L'enseignante avait précisé « maintenant on va voir les applications de la racine à la résolution d'équation du premier degré » (passage 11) qui semblait vouloir dire qu'il s'agissait d'illustrer la première partie du titre : « application de la racine carrée » plutôt que la seconde. De ce point de vue, nous pouvons comprendre et admettre les propos de l'enseignante qui explicite la résolution. Si l'objectif didactique était de repérer les situations où l'outil « racine carrée » doit être mobilisé, il ne semble pas déplacé d'éluder de l'apprentissage visé ce qui ne s'y rapporte pas directement : les propriétés algébriques "de résolution d'équations" autres que l'utilisation du rôle « outil » de la racine carrée. Or ceci est contradictoire avec la conclusion déduite de l'analyse du titre que nous exposons dans la comparaison au manuel. Nous y notons que le propos de l'enseignante n'était pas de mobiliser chez les élèves l'outil « racine carrée » mais d'introduire la résolution d'équation par le rappel de certaines techniques constituées des propriétés algébriques que nous mentionnons en note. Ainsi l'enseignante décharge totalement les élèves du travail de recherche et de mobilisation de leurs connaissances qu'ils ont à effectuer pour résoudre l'exemple proposé.

Nous constatons ici aussi que l'enseignante effectue le travail des élèves et ne leur laisse que l'occasion de développer le niveau technique de leurs connaissances.

Nous confirmons ce que nous notions au passage 13 : le titre choisi par l'enseignante n'est pas adéquat. Le discours de l'enseignante en classe exclut de l'intention didactique ce que le titre sous-entend. Comme pour le passage 14 tout se passe comme si la présence des élèves conduisait l'enseignante à jouer à l'élève en situation didactique. L'enseignante ne s'adapte pas aux élèves, elle leur montre une partie du raisonnement qu'on peut attendre qu'ils tiennent.

***Passage 18*** (simplification)

• Donc 10 sur racine de 3 ici je divise par racine de 3 donc là je dois diviser par racine de 3
AP

♦ alors qu'est ce qu'on avait dit quand j'ai 10 sur racine de 3 ? autre I

♦ **Est-ce que je peux laisser cette écriture là ?** **autre I**

~~Non il faut, il faut enlever, il faut le mettre en haut.~~

o Alors faut mettre en haut IC

~~10 fois racine de trois~~

♦ Alors ? AC

~~On multiplie par racine et en bas on va avoir trois parce que c'est la racine de 3~~

o Oui mais le problème c'est que tout le monde ne comprend pas. IC

• **Alors comme je ne peux pas laisser de racine ici au dénominateur, je vais donc enlever ma racine ici,**
**habitude I**

• multiplier au dénominateur par racine de 3, je vais multiplier ici au dénominateur par racine de 3 parce-que quand j'aurais racine de 3 par racine de 3, ça donnera 3. Mais comme j'ai multiplié au dénominateur par racine de 3, je suis obligée aussi de multiplier au numérateur par racine de 3, ça on l'avait vu. AP

o Alors j'obtiens donc x égal donc 10 fois racine de 3, 10 racine de 3 sur 3. IC

~~On peut pas multiplier racine de 3...~~

o Oui tu peux multiplier euh écrire racine de 3 fois racine de 3 pour aller plus vite, IC

◆ racine de 3 fois racine de 3 ça fait quoi ? IA

~~3~~

o Voilà IC

~~3 carré.~~

Commentaire

Nous formulerons notre commentaire sous forme de remarques.

- Les élèves ont "appris" qu'il ne fallait pas laisser de "racine" au dénominateur d'une fraction.

- Les élèves ne "savent pas" tous comment transformer une fraction en une fraction équivalente. Ceux qui ne savent pas n'ont peut-être pas encore totalement appréhendé les nouveaux nombres irrationnels qu'ils manipulent.

- l'enseignante explicite la transformation de la fraction $\frac{10}{\sqrt{3}}$ en la fraction équivalente $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Pour cela, il faut "savoir" comment écrire deux fractions équivalentes et il faut anticiper l'opération à effectuer sur $\sqrt{3}$ en fonction de l'objectif visé. Une erreur pourrait être d'élever la fraction au carré, ainsi le dénominateur serait entier...

Nous reconnaissons une situation qui se rapproche du type II : un élève a répondu correctement en entamant une explication que l'enseignante interrompt pour expliciter la démarche à suivre. L'enseignante se substitue aux élèves plutôt que de les conduire au résultat attendu.

***Passage 19*** (conclusion)

◆ Donc quelle est ici la réponse au problème posé ? IA

◆ Puisqu'on a fini notre calcul alors c'est effectivement la résolution de l'équation, elle représente quoi ? SB

~~La hauteur~~

• On est parti d'un problème au départ SB

~~Ca représente la longueur du côté~~

o Voilà vaut 10 racine de 3 sur 3 IC

Commentaire

Le passage 13 (cf. ci-dessus type I) énonçait l'exemple qui débutait la deuxième partie du cours. Le passage 19 est la réponse à l'exercice que constituait l'exemple. La réponse n'est pas seulement numérique, l'enseignante entraîne les élèves à relier leur production à l'énoncé de l'exercice. Ici aussi comme pour le passage 12, l'enseignante sollicite les élèves. Cette sollicitation ne porte pas sur des connaissances mathématiques particulières, elle porte sur la formulation de la réponse. La classe a produit le résultat ($x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$) et l'enseignante fait préciser aux élèves ce que représente « x ». L'énoncé de l'exercice était « la hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5 cm. Trouver x la longueur du côté ». Ainsi, la réponse de la classe portant sur la valeur de « x » est en accord avec la question puisqu'on leur demandait de « trouver x ». De la même façon, la formulation que l'enseignante attendait (« la longueur du côté du triangle équilatéral vaut... ») est en accord avec la deuxième partie de la question « la longueur du côté ». Nous voyons ici une surcharge de précision provoquée par la formulation de la question qui indique comment nommer la valeur à trouver. Cette formulation donne le choix entre deux réponses : « x vaut... » ou bien « la longueur de la hauteur est... ». La réponse des élèves et l'attente de l'enseignante sont ainsi justifiées, elles sont cohérentes avec la forme de l'énoncé. Nous pouvons interpréter la surcharge de précision par la volonté de l'enseignante de prévenir les élèves d'un oubli des données de base qui parfois conduit à une perte de sens de ce qui se fait.

Le discours de l'enseignante tend à montrer aux élèves ce qu'on attend qu'ils écrivent. Il ne les conduit pas à construire leur réponse puisque la construction mathématique de la réponse est déjà formulée par l'énoncé qui proposait d'appeler « x » la longueur d'un côté à chercher.

Nous retrouvons ici une conclusion de type II : l'enseignante se substitue aux élèves en formulant l'exercice qu'ils ont à résoudre de sorte qu'ils trouvent "facilement la bonne réponse" : tout se passe comme si elle négociait à la baisse le contrat didactique en "allégeant" le projet didactique.

### *2.3- Le type III*

### 2.3.1- Définition du type III

Nous dirons qu'un passage est de type III lorsque nous pouvons conclure ce qui suit : tout se passe comme si l'intervention des élèves conduisait l'enseignante à s'écarter de ce qu'elle avait prévu en adaptant son discours à leurs propos. A ce niveau, nous déterminons deux types III. Le premier (III1) est caractérisé ainsi : l'enseignante apporte un élément plus général à la situation qui est traitée. Le deuxième type III (III2) est caractérisé ainsi : l'enseignante réduit le travail des élèves en explicitant partiellement ou totalement la nouvelle situation de façon très locale.

### 2.3.2- Les passages de type III

*Type III1*

***Passage 17*** (rappels sur les équations)

Afin de situer l'enchaînement des interventions, nous rappelons le passage 16 qui précède immédiatement le 17. Le passage 17 se situe dans l'encadré.

| | |
|---|---|
| ♦ Alors une hauteur mesure x racine de 3 sur 2, dans le cas précis combien on peut calculer ? | IA |
| ~~5~~ | |
| o Voilà donc on va avoir donc hauteur x racine de 3 sur 2 égal 5. | IC |
| ♦ Ici comment fait-on pour résoudre ce genre d'équation ? | AM |
| ~~On fait 5 moins non est égal à zéro.~~ | |
| o oui on peut. | IC |
| ♦ On peut faire plus facilement. Cécile ? | répétition AM |
| ~~On fait x racine 3 par 2 est égal~~ | |
| o Oui d'accord | IC |
| ♦ est-ce que quelqu'un d'autre a une idée ? | répétition AM |
| o Caroline voilà directement x racine de 3 égal 10 ($x\sqrt{3} = 10$) c'est ce que disait Cécile mais en plus simple. | IC |
| o Ici lorsqu'on a une égalité, on réduit au même dénominateur de chaque côté | AM |
| o donc ça nous donne x racine de 3 sur 2 égal 10 sur 2 . | IA |

~~Pourquoi, comment ?~~
~~Pourquoi égal 10 ?~~
Pourquoi égal 10 ? autre
o Alors quand tu réduis au même dénominateur ici et là, 5 c'est comme si tu avais 5 sur 1, 10 sur 2 AP
♦ et comme j'ai le même, quelle est l'opération que je fais ? AP
♦ je multiplie toute l'équation par ? IA
~~2~~
o 2, je multiplie toute l'équation par 2. IC
o Donc je vais avoir x racine de 3 égal 10 (oui, non ?) AP
• Ici quand je multiplie toute l'équation par 2, 2 fois ça sur 2, il me reste x racine de 3 et 2 ça fait 10 (oui ?) AP

~~On les a enlevés les deux ou pas~~
o **Oui on les a enlevé oui, parce-que tu fais la même opération** **AP**
~~c'est une équation~~
o **Voilà, c'est une équation, tu fais la même opération des deux côtés.** **répét. AP**

Commentaire

En accédant à la requête d'un élève, l'enseignante fait très rapidement référence à une propriété des équations. Cette référence est l'occasion de répondre, d'un point de vue général, à la question posée. Nous avons donc classé la réponse en discours décontextualisé. Elle repose sur la compatibilité de la relation « = » avec les opérations, propriété qui se traduit en classe de troisième par "faire la même opération dans les deux membres d'une équation". Ce passage permet donc une décontextualisation et le rappel d'un résultat général « c'est une équation tu fais la même opération des deux côtés ». Les interventions des élèves "obligent" l'enseignante à adapter son discours à la classe. Ce passage nous montre qu'il était nécessaire pour les élèves de préciser ce point « faire la même opération des deux côtés » puisqu'ils le questionnent, il nous montre comme pour les passages 7 et 8 que ce n'est qu'après une deuxième sollicitation que l'enseignante expose l'explication mathématique des calculs effectués. Il nous montre aussi qu'un élément essentiel « c'est une équation » est indiqué par un élève comme commentaire aux échanges précédents. Un élément essentiel est donc précisé grâce à un élève qui l'a reconnu. Les interventions des élèves "obligent" l'enseignante à adapter son discours à la classe. L'intention didactique ne semblait pas porter sur ce point...

*Type III2*

***Passage 7***

Ce passage se situe dans la première partie du cours. Il s'agit ici de déterminer la valeur de AH alors que l'équation $AH^2 = \frac{3a^2}{4}$ est connue.

*Extrait :*

| | |
|---|---|
| ♦ **Alors maintenant si je veux AH parce que j'ai AH carré qui est trois a carré sur quatre, si je veux AH ?** | IA |
| ~~Euh racine carrée de~~ | |
| o Oui racine carrée de 3a carré sur 4 | IC |
| ~~pourquoi racine carrée~~ ? | |
| pardon ? | non classé |
| o quand tu écris que x au carré vaut 25 d'accord, x vaut combien , | IA |
| ~~5~~ | |
| o 5 tu as bien fait racine de 25 | AC |
| ~~oui mais là on peut faire divisé par deux ah ben non~~ | |
| o non non là je prends la racine | AC |

Commentaire

Nous interprétons le problème que l'enseignante pose comme suit : quel outil mathématique permet d'obtenir AH à partir de $AH^2$ (« si je veux AH parce que j'ai $AH^2$ ») afin d'appliquer ce même outil à la valeur de $AH^2$ (« parce que j'ai $AH^2$ qui est trois a carré sur quatre »). Nous reformulons cette interprétation comme suit : "je cherche un nombre (AH) sur lequel un outil a opéré. Je sais quel outil a opéré (fonction puissance 2), je connais le résultat de l'opération ($3a^2/4$). Quel outil mathématique dois-je appliquer pour retrouver le nombre de départ ?". L'avantage des deux versions des propos de l'enseignante réside dans l'accentuation de la fonction "puissance 2" qui peut conduire un élève à mobiliser ses connaissances y afférent, en particulier la fonction réciproque dont il dispose sous la forme de la définition de la racine carrée (positive). Cette accentuation est implicite dans le discours de l'enseignante, elle est indiquée par la puissance 2 de AH. Un élève ($e_1$) répond correctement « racine carrée ». Un autre élève ($e_2$) n'a pas compris et demande une explication « pourquoi racine carrée ? ». L'enseignante éclaire la situation en proposant un exemple générique « $x^2 = 25$ » sans expliciter l'assimilation de la relation $AH^2 = 3a^2/4$ à $x^2 = 25$. Ensuite, elle fait dire à l'élève ($e_2$) la solution numérique attendue pour l'exemple : « x = 5 » ce qui lui permet de justifier l'outil appliqué ; « tu as bien fait racine de 25 ». L'élève ne semble pas convaincu puis semble se rendre à une évidence : « oui mais là on peut faire divisé par deux ah ben non ». La valeur 25 rend l'exemple générique particulier puisque 25 est un "carré parfait". Un élève peut comprendre que la solution est x = 5 parce que $5^2 = 25$ : en remplaçant x par 5 l'égalité $x^2 = 25$ est vraie ; le carré de 5 est bien 25. En fait, il faut comprendre : la solution (positive) est 5 puisque dans l'égalité $x^2 = 25$, 25 représente une puissance deux de x, ainsi pour obtenir x il faut utiliser la racine, ici la racine carrée (positive). Tout se passe comme si l'enseignante jouait sur l'écriture de 25 : $25 = (\sqrt{25})^2$, $25 = 5^2$ pourvu que les élèves reconnaissent l'une des deux. De cette façon, tout ce qu'un élève peut comprendre concernant 5 est difficilement transférable à $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ du fait de la racine. Un élève peut ne pas voir aussi facilement le lien entre 5 et 25 que celui entre $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ et $3a^2/4$. Les connaissances à mobiliser ne sont pas obligatoirement les mêmes. Dans le second cas, la définition de la puissance 2 et la définition de la racine carrée sont sollicitées, dans le premier cas, la seule définition de la puissance 2 est suffisante.

Ce passage nous montre que, dès le début, "spontanément", l'enseignante a placé les élèves en situation didactique puis sur sollicitation d'un élève, elle a transformé cette situation voulant clarifier l'objet sur lequel porte l'apprentissage. Elle a explicité ensuite l'objectif visé après avoir reconnu chez les élèves une partie d'un résultat attendu.

Tout se passe comme si l'enseignante déplacait l'objet de l'apprentissage ; il ne s'agit plus pour les élèves de reconnaître des situations où l'objet "racine carrée (positive)" est nécessaire mais de reconnaître que des nombres répondent à des problèmes donnés.

***Passage 8*** (problème autour de la racine carrée)

♦ François ça va ? autre

~~Où il est passé le racine de a non le carré de a ?~~

~~Le carré et la racine, ça se simplifie.~~

**o Alors on a vu quand tu prends, quand tu as un nombre au carré** **AP**

o par exemple quand j'écris racine de 25, ça tu sais, ça vaut 5 mais 25 je peux l'écrire comme étant 5 au carré d'accord, AP

**o on obtient directement le nombre qui était élevé au carré** **AP**
♦ oui ? autre

Commentaire

Ce passage est provoqué par la question d'un élève : « où il est passé la racine de a non le carré de a ? ». Une partie de la réponse est classée en discours décontextualisé : « quand tu as un nombre au carré (...) on obtient directement le nombre qui était élevé au carré ». La réponse est entrecoupée d'une explication donnée à l'aide d'une contextualisation permettant à l'enseignante de particulariser la situation que l'élève interroge : « par exemple quand j'écris racine de 25, ça tu sais, ça vaut 5 mais 25 je peux l'écrire comme étant 5 au carré d'accord ». L'exemple numérique est identique à celui qui a servi d'explication à l'écriture ($AH^2 = \frac{3a^2}{4}$ alors $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$) du passage 7. La situation n'est pas la même mais l'exemple fourni met en jeu le même nombre 25. Une différence apparaît : pour le passage ci-dessus une équation intervenait ($x^2 = 25$) et pour le passage 8, l'enseignante précise « quand tu as un nombre au carré (en appliquant la racine carrée) on obtient directement le nombre qui était élevé au carré ».

Nous avons l'impression que l'intention de l'enseignante est de faire apparaître une propriété plus générale de la racine carrée avec le cas particulier du carré parfait 25 utilisé dans deux situations différentes. Le carré permet de "voir" : si un nombre (positif) est le carré d'un autre positif, alors ce dernier est la racine du premier ; si ($a = b^2$) alors ($\sqrt{a} = b$). Cette propriété permet de rappeler la définition de la racine carrée qui répond à la question de l'élève du passage 8 et elle permet aussi de mettre en évidence une utilisation de la racine carrée qui peut répondre à la demande d'explication formulée par l'élève ($e_2$) au passage 7. Les deux situations sont différentes, les explications peuvent paraître semblables, il nous semble qu'un élève en saisira difficilement la nuance et accédera difficilement à ce que nous pouvons "voir".

La question qui débute le passage a conduit l'enseignante à s'écarter provisoirement des calculs effectués. En cela, nous supposons qu'elle s'est écartée de sa préparation du cours. Ici il nous semble que la vigilance de l'enseignante ne lui a pas permis de recourir en profondeur à ses connaissances de niveau (n+p) pour distinguer des situations que les élèves peuvent avoir du mal à cerner et pour adapter ses explications aux situations en présence.

## 3- Les passages mixtes

### *3.1- Le passage de type I×III*

***Passage 6***

Par hypothèse AB = a, les passages précédents ont conduit aux écritures :

(HB = a/2) et ($AB^2 = AH^2 + HB^2$)

*Extrait*

| | |
|---|---|
| • donc ensuite on remplace | SE |
| • AH carré ($AH^2$) puisqu'on le cherche ça bouge pas | AM |
| ♦ HB carré ($HB^2$) ça va nous donner combien ? | IA |
| ~~On passe de l'autre côté ça donne moins~~ | |
| o Euh oui d'accord | IC |
| • on va d'abord remplacer après | autre I |
| ~~a sur deux~~ | |
| ♦ Oui alors comment tu l'écrit ? | IA ou AC |
| ~~Ah ben non~~ | |
| oa sur deux le tout au carré | IA |
| ♦ ça fait ? | IA |
| ~~a au carré sur quatre ($a^2/4$)~~ | |
| ~~ben on~~ | |
| o oui ça fait a carré sur quatre ($a^2/4$) | IC |
| • alors on va l'écrire après | SR |
| • égal donc AB carré, a carré plus donc sur quatre égal a carré | IA |
| ~~Madame pourquoi a carré à la fin~~ ? | |
| o AB c'est au carré, AB vaut a donc AB au carré c'est a carré | AP |

<u>Commentaire</u>

Aucune intervention n'est indiquée en discours décontextualisé, cependant les deux premières phrases pourraient l'être. Nous avons classé la première phrase en "structuration étape" (SE), elle peut signifier que, de façon générale, à partir d'un certain niveau de développement des calculs, on peut passer à une autre étape. Nous ne l'avons pas classée en discours décontextualisé car elle nous semble assez vague ; rien dans son contexte ne peut permettre aux élèves de comprendre qu'il s'agit effectivement d'une étape sauf éventuellement l'intervention qui lui succède et que nous commentons dans ce qui suit.

La comparaison au manuel nous conduira à dire pour ce passage que l'enseignante répond à la consigne de l'exercice proposé dans le manuel qui est d'exprimer $AH^2$ en fonction de « a ». L'enseignante reprend cette consigne avec la première phrase « donc ensuite on remplace » et l'agrémente d'un court commentaire que nous avons classé en méthode « AH carré ($AH^2$) puisqu'on le cherche ça bouge pas » qui peut être interprété de deux façons. D'un point de vue "dynamique", "$AH^2$ ne bouge pas de place, il reste dans le premier membre de l'égalité, alors que tout le reste bouge en changeant de place, de membre de l'égalité" ou bien d'un point de vue "variable" qui est un début de généralisation du résultat en cours de constitution à tous les triangles équilatéraux. Le point de vue "variable" est le suivant : "on cherche à exprimer $AH^2$ en fonction de « a » (ce qui pour les élèves généralise en partie le résultat), puisqu'on ne le connaît pas encore – il n'est pas variable – il ne bouge pas en ne changeant pas d'expression, ce sont seulement les autres longueurs – dont l'expression est variable – longueurs connues en fonction de « a » qui bougent en changeant d'expression". Un élève répond au premier point de vue : « on passe de l'autre côté ça donne moins », l'enseignante attendait le deuxième, elle l'avait annoncé et le confirme « on va d'abord remplacer ». Le commentaire de méthode semble trop court pour être interprété dans ce sens puisqu'un élève a correctement répondu suivant le point de vue "dynamique". Ce que nous pouvions interpréter comme une tentative de l'enseignante de généraliser le résultat n'est pas saisi des élèves. Elle ne change pas pour autant de stratégie, n'adopte pas la position de l'élève et n'explique pas davantage son point de vue, elle détaille simplement le calcul qu'elle attendait : « HB carré ça va nous donner combien ? » puis « donc AB carré, a carré ». Nous trouvons une situation semblable à celle du passage 2 concernant les termes médiane et médiatrice. La proposition de l'élève non adoptée par l'enseignante pouvait être développée et pouvait conduire au résultat attendu. L'adoption de cette proposition pouvait restituer un rôle plus important aux connaissances des élèves où elles auraient été mises en jeu et finalement institutionnalisées. Nous aurions alors assisté à une adaptation du discours de l'enseignante à celui des élèves, à un changement de point de vue de la part de l'enseignante c'est-à-dire à une petite mise en œuvre de ses connaissances de niveau (n+p).

Nous constatons donc une apparition timide des connaissances de niveau (n+p) de l'enseignante au début du passage concurrencée par la situation de classe qui se traduit par une exécution technique des calculs attendus. L'adaptation de l'enseignante à la classe est évincée et se transforme en l'affirmation d'un point de vue qui semble lui aussi avoir été préparé. Cette affirmation est ensuite convertie en l'adoption d'un point de vue où seules les sous-tâches locales sont développées. Tout se passe comme si, pour l'enseignante, "s'adapter" à la classe voulait dire "faciliter le projet didactique" en n'attendant des élèves qu'un niveau technique de mise en œuvre de leurs connaissances même s'ils peuvent aller au-delà.

### *3.2- Les passages de types II×III*

***Passage 4*** (calcul de AH)

• donc maintenant, on n'a plus qu'à calculer AH. SE
♦ Alors on va utiliser Hubert tu termines, avec quoi on va pouvoir calculer AH ? AC
~~AB moins HB~~
♦ Alors on utilise ? répétition AC
~~avec Pythagore~~
♦ Oui ou ? (Oui où ?) AC
~~La réciproque~~
~~ouais la réciproque~~
~~Thalès~~
~~ou les racines carrées (inaudible)~~
o Non dis pas n'importe quoi appréciation I
et puis si tu as quelque chose à dire, tu lèves la main autre
♦ Alors on utilise le théorème de Pythagore ou sa réciproque ? AC
~~Le théorème de~~
**o Oui le théorème de Pythagore. IC**
**• Le théorème de Pythagore va servir à calculer une longueur alors que la réciproque elle sert à montrer que le triangle est rectangle. AC (ou AM)**
• Attention alors là on a deux longueurs, on peut calculer la troisième donc c'est Pythagore. AM
♦ Mais où (ou) pourquoi est ce qu'on peut utiliser le théorème de Pythagore ? AP
~~y a un angle (inaudible)~~
~~parce qu'il est rectangle~~
o parce qu'il y a le triangle rectangle IC
~~ah~~
♦ Alors ? AC
~~alors on fait AB au carré moins HB au carré et on obtient HA~~
o D'accord IC
• Alors on va l'écrire. SR

Commentaire

Les passages 2 et 3 qui précèdent le passage 4 faisaient jouer deux rôles au segment [AH] : hauteur et médiatrice, ni l'enseignante ni les élèves n'ont mentionné que ce segment est perpendiculaire au côté [BC] qu'il intercepte. Ce point évident et inutile pour les passages 2 et 3 n'est pas non plus précisé dans le passage 4 où il est nécessaire. Ce passage 4 nous montre que l'enseignante omet de préciser que c'est bien grâce à cette caractéristique de la hauteur ou de la médiatrice que le triangle AHB est rectangle en H. Il semble donc que ce point soit sous-entendu et que l'enseignante a fondé son raisonnement sur ce sous-entendu puisque nous le retrouvons avec la hauteur, la médiatrice et l'application du théorème de Pythagore. Par ailleurs, il semble que les élèves doivent rétablir eux-mêmes les moments où sa mention est nécessaire. Nous concluons simplement qu'une unique caractéristique du triangle semble avoir été prise en compte par l'enseignante lors de la préparation de cette partie du cours, caractéristique "oubliée" lorsqu'elle est nécessaire.

Nous poursuivons notre commentaire avec le point d'ordre méthodologique sur le théorème de Pythagore provoqué par la question « oui ou (où) ?». L'audition de la question « oui ou ? » ne permet pas de déterminer si « ou » est la conjonction de coordination ou bien « où » la préposition de lieu.

Les élèves répondent à « oui ou ? » en proposant autre chose à appliquer. Si l'enseignante pose effectivement cette question, nous l'interprétons comme une vérification de la connaissance des élèves du « théorème de Pythagore » et de sa « réciproque » qui est plus loin explicitée. Cette situation serait alors semblable à celle du passage 2 où nous émettions l'hypothèse que l'enseignante voulait s'assurer de la disponibilité des termes « médiane » et « médiatrice » auprès des élèves.

L'intervention succédant à « oui ou (où) ? » est « mais où (ou) pourquoi est-ce qu'on peut utiliser le théorème de Pythagore ? ». Cette demande de précision peut nous amener à penser que dès le début, la question était « oui où ? ». L'intervention qui succède encourage les élèves à arrêter leur choix sur le théorème de Pythagore. Enfin, une dernière question « mais où (ou) pourquoi est-ce qu'on peut utiliser le théorème de Pythagore ? » peut être vue comme une précision apportée au sens de la première question « oui où ». L'explication appelée peut se formuler par la désignation du lieu d'application du théorème, ici le triangle AHB rectangle en H.

Si la première question posée était « oui où ? », nous retiendrons alors l'opportunité que l'enseignante a saisie de transformer « où » par « ou » et de continuer sur ce thème. Dans ce cas, nous notons que l'enseignante a adapté sa réponse à la situation créée par les élèves ce qui distingue ce passage 4 du passage 2 où nous notions le contraire.

Poursuivons notre commentaire. La situation du passage 2 (médiane/médiatrice) et celle du passage 4 (oui où/oui ou) se révèlent, en fait, peu semblables. En effet, pour le passage 2, la suite à donner au raisonnement entamé ne dépendait pas du choix de l'un des deux termes. Au contraire, pour le passage 4, chacun des deux termes définit une situation dont le développement dépend du terme choisi, aucun des deux développements ne pouvant se substituer à l'autre.

L'adaptation du discours de l'enseignante suivant les propos des élèves se transforme ici en une contrainte liée à la situation. Les élèves provoquent des situations qui contraignent l'enseignante à s'adapter en disposant de ses connaissances.

Enfin, nous constatons que ce point d'ordre méthodologique autour du théorème de Pythagore est proposé par l'enseignante. Bien que ce soient les élèves qui ont provoqué cette mise au point, ils ne sont pas conduits à le formuler ce qui tend à renforcer les conclusion du passage 2. L'enseignante restreint leur travail à la production de réponses ponctuelles correctes et se charge des explications ou commentaires à fournir ainsi que de la structuration et de la méthode.

***Passage 5*** (le théorème de Pythagore)

♦ Alors donc dans le triangle rectangle AHB, dans le triangle rectangle AHB, d'après le théorème de Pythagore on a quoi ? IA
**o la somme des carrés des côtés égale le carré de l'hypoténuse. propriété IT**
o Dans le triangle AHB, d'après le théorème de Pythagore on a que AH carré plus HB carré égal AB carré... IA

Commentaire

Ce passage est court et résume ce qui précède (passage 4 ci-dessus). L'intervention décontextualisée expose le contenu du théorème dont les élèves avaient précisé le titre « théorème de Pythagore ». L'enseignante intervient pour notifier sa contextualisation au triangle rectangle AHB qu'un élève avait certainement déjà effectuée puisque juste avant le passage 5, il donne le résultat d'un premier calcul portant sur l'expression contextualisée (« alors on fait $AB^2 - HB^2 = HA^2$ »). L'enseignante ne prend pas en compte cette intervention et se substitue aux élèves pour indiquer le détail des calculs qu'elle semble avoir prévu.

L'enseignante pose les questions et y répond. La traduction contextualisée du théorème peut permettre aux élèves de remarquer qu'une connaissance générale se traduit en connaissance locale.

Les passages 4 et 5 portent tous deux sur le théorème de Pythagore et le triangle rectangle. Les discussions de la classe ont conduit l'enseignante à préciser s'il s'agissait d'appliquer le « théorème » ou « sa réciproque », ce qui lui a permis d'introduire un élément de méthode. Tout comme le passage 4, le passage 5 ne précise pas pourquoi le triangle (AHB) est rectangle ni en quel sommet il l'est. Il semble bien ici que la « hauteur » ou la « médiatrice » des passages 2 et 3 suffise à la conclusion. Un élève doit comprendre que ces deux termes veulent dire « perpendiculaire » au point H... Tout se passe comme si l'enseignante s'était laissée entraîner par la situation laissant implicite des "détails" et que le vocabulaire employé avait eu raison de sa vigilance ainsi que des justifications à apporter pour l'application en cours.

Nous constatons donc que l'enseignante :

- développe des contenus que les élèves pourraient énoncer à sa place et en omet d'autres.
- se substitue aux élèves pour effectuer certaines contextualisations.
- ne relève pas les propos d'un élève qui semble avoir déjà contextualisé le théorème de Pythagore au triangle rectangle AHB.
- Le discours de l'enseignante favorise peu la construction d'un raisonnement mathématique.

Nous repérons essentiellement deux situations : l'enseignante attend quelque chose des élèves ou bien l'enseignante ne semble pas attendre de réactions des élèves. Deux attitudes caractérisent la première situation.

1- Si l'enseignante reconnaît dans les propos des élèves les résultats qu'elle attendait, elle les valide.

2- Si l'enseignante ne reconnaît pas les résultats qu'elle attendait, elle les explicite au lieu de conduire les élèves à les découvrir.

Dans la deuxième situation, si les élèves interviennent, l'enseignante apporte des justifications à ce qu'ils disent et ne les sollicite pas pour qu'ils le fassent.

Nous supposions (cf. problématique) que les enseignants préparaient leurs cours avant de se trouver en classe avec les élèves. Nous renforçons cette hypothèse ainsi que les conclusions du passage 2. Ici tout se passe comme si cette préparation constituait un modèle auquel l'enseignante se réfère exclusivement, n'acceptant de s'en écarter que lorsqu'elle ne peut y échapper. Tout se passe comme si la situation de classe apportait des "perturbations" au suivi de ce modèle : omission de certains éléments, écarts très ponctuels et faible adaptation aux propos des élèves.

***Passage 25*** **(résolution d'une équation deuxième étape : calculs algébriques)**

Ce passage se situe en deuxième partie de cours. L'enseignante a proposé la résolution de l'équation :

$$x\sqrt{3}-5=x\sqrt{12}+x$$

qui a été transformée en :

$$x\sqrt{3}-x\sqrt{12}-x=5$$

puis en :

$$-x\sqrt{3}-x=5.$$

La deuxième phrase du passage : « Oui on peut pas arranger, on peut pas calculer, ici on a pu calculer mais là, on peut pas calculer » fait allusion à $(-x\sqrt{12})$ transformé en $(-2x\sqrt{3})$ puis au calcul :

$$x\sqrt{3}-2x\sqrt{3}=-x\sqrt{3}.$$

*Extrait :*

| | |
|---|---|
| ♦ Alors maintenant, est-ce que entre les x est-ce que je peux arranger encore ? | AC + SR |
| ~~(inaudible)~~ | |
| o Oui on peut pas arranger, on peut pas calculer, ici on a pu calculer mais là, on peut pas calculer | IC |
| ♦ donc on peut ? | répét. AC |
| ~~Factoriser, on met x~~ | |
| o Voilà | IC |
| ~~Facteur de racine de 3 moins 1~~ | |
| o Il manque quelque chose... moins racine de 3. | IC |
| ~~Ah ouais d'accord~~ | |
| ~~Oh là là~~ | |
| o moins 1. Si je mets en facteur, oui, si je mets en facteur, le x en facteur, d'accord ? je mets en facteur, quand je mets x en facteur, il me reste | IA |
| ~~Pourquoi vous~~ | |
| o Dans le premier terme, il me reste moins racine de 3 dans le deuxième il me reste bien moins un | IA |
| ♦ égal ? | IA |
| ~~5~~ | |
| o cinq oui (?) | IC |
| ~~Pourquoi vous avez moins racine de 3 ?~~ | |
| ~~On pourrait mettre moins x en facteur et à ce moment là~~ | |
| ♦ Et si on mettait moins x en facteur, j'aurais quoi dedans ? | IA |
| ~~Racine de 3.~~ | |
| o Voilà j'aurais racine de 3 plus un, j'aurais l'opposé | IC |
| ~~Madame vous n'avez pas terminé (inaudible)~~ | |
| o Voilà c'est ça d'accord. | IC |

**• Parce qu'attention, on a vu comme pour les factorisations avec les produits remarquables hein, ici quand j'ai x en facteur, surtout ne pas dire qu'il ne reste rien, il reste toujours un quand on met en facteur**

**mise en garde I + AP**

Commentaire

Seule la dernière phrase du passage est décontextualisée, elle nous permet donc de commenter ce qui est dit ici. Nous allons formuler quelques remarques.

Le début du passage « on peut pas arranger, on peut pas calculer... donc on peut ? » institue une différence entre l'exécution d'un calcul, l'exécution d'une opération et la mise en œuvre d'une propriété (la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction). En effet, la suite est consacrée à une factorisation : à la question « on peut ? », un élève répond « factoriser, on met x... ». L'enseignante aide les élèves en demandant « est-ce que je peux arranger encore ? ». Elle leur indique indirectement un chemin à suivre, un constat à établir. Ici aussi, l'enseignante anticipe le travail des élèves en se substituant partiellement à eux.

L'enseignante introduit le mot terme au moment de la factorisation :

> « si je mets en facteur, oui, si je mets en facteur, le x en facteur, d'accord ? je mets en facteur, quand je mets x en facteur, il me reste », « dans le premier terme, il me reste moins racine de 3 dans le deuxième il me reste bien moins un ».

L'explication du détail du calcul la conduit pour la première fois à préciser un vocabulaire mathématique adéquat.

La dernière phrase du passage permet le rappel d'un point important : (1) est neutre pour la multiplication (...ici, quand j'ai x en facteur, surtout ne pas dire qu'il ne reste rien, il reste toujours (1) quand on met x en facteur »). La neutralité de (1) n'est pas explicitement rappelée, elle doit être rétablie par les élèves qui doivent comprendre "il reste toujours (1) quand on met x en facteur parce que x = 1x".

Nous remarquons une différence dans les propos de l'enseignante suivant les situations : quand il s'agit de ce que les élèves ont à dire ou faire, tout se passe comme si elle les remplaçait, quand un point peut être source d'erreur ou de confusion pour les élèves, elle en rappelle le résultat laissant implicite la raison de ce résultat. Nous retrouvons ainsi des conclusions de passages précédents. Le "comment" est privilégié au détriment du "pourquoi".

## 4- Une histoire d'article : étude de trois épisodes

Nous avons réuni et commenté trois épisodes de la classe où un dialogue s'établit autour des articles définis ou indéfinis à utiliser avec les mots hauteurs et côtés.

### *4.1- Premier épisode*

Nous avons extrait de la partie du cours portant sur la mise en évidence de la formule « $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ » toutes les phrases où l'enseignante utilise le mot « hauteur » (« h » désignant « la » longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral et « a » la longueur d'un côté).

1- « on avait commencé à calculer la hauteur dans un triangle équilatéral »

2- « qu'est ce qu'on a dit qu'on allait utiliser pour calculer la hauteur AH ? »

3- « dans un triangle la hauteur est aussi... »

4- « alors dans un triangle équilatéral la hauteur issue d'un sommet est aussi... »

5- « voilà la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du côté opposé »

6- « puisque la hauteur est aussi médiatrice, ça veut dire qu'elle coupe »

7- « donc la hauteur issue de A coupe le segment [BC] en son milieu H »

8- « alors on a calculé pour le cas général. Quand on vous donne un triangle équilatéral de côté « a », la longueur de la hauteur ici d'un sommet au pied de la hauteur, ça fera toujours « $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ».

Pour chacune de ces phrases, nous remarquons que l'article de « hauteur » est l'article défini « la ». D'autres termes associés à « hauteur » laissent entendre différents contextes d'utilisation de ce mot. Introduit par « calculer », « la hauteur » des deux premières phrases appelle un cadre où la tâche des élèves est de déterminer la longueur d'un segment. Algèbre et géométrie sont mêlées. Dans ce cadre, deux sens peuvent être attribués à « hauteur » : segment ou longueur de segment. Nous pouvons entendre la première phrase d'un point de vue général : "on avait commencé à calculer la *longueur d'un (quelconque des trois) segment(s) qui définit une* hauteur dans un triangle équilatéral". Nous entendons la deuxième phrase comme une contextualisation de ce point de vue à l'exercice en cours : "qu'est ce qu'on a dit qu'on allait utiliser pour calculer la *longueur* AH *de la* hauteur *(représentée par le segment) [AH]"* . Dans la deuxième phrase de l'enseignante « la hauteur » semble être utilisée dans le sens "la *longueur* AH"[8]. La longueur est désignée, elle indique la distance séparant les points A et H. Le segment est sous-entendu, il s'agit du segment [AH], les extrémités constituent les deux points dont la distance va être calculée.

La précision « issue d'un sommet » que l'enseignante apporte dans les phrases 4, 5 et 7 restreint le cadre précédent à un cadre où la hauteur est vue comme un ensemble de points dont nous pouvons supposer qu'il s'agit d'un segment. Dans ce nouveau cadre, il n'est pas question de « calcul ». En développant et complétant la phrase 6 à l'aide des phrases 5 et 7, nous obtenons "puisque la hauteur *issue d'un sommet* est aussi médiatrice *du côté opposé*, ça veut dire qu'elle coupe *ce côté opposé* en son milieu" : il s'agit bien d'un segment voire d'une demi-droite, nous trouvons alors confirmation de la restriction opérée sur le cadre de départ. Tout se passe comme si par la précision des phrases 4, 5 et 7, l'enseignante voulait signifier aux élèves que « hauteur » avait changé de cadre, lui attribuant le sens spécifique de segment. La phrase 8 permet de joindre les deux cadres : « on a calculé » rappelle le cadre des phrases 1 et 2 et « d'un sommet au pied de la hauteur » rappelle le cadre des phrases 3 à 7. Tout se passe comme si les élèves devaient comprendre qu'il est admis de substituer « hauteur » à "segment" et à "longueur de segment" et comme s'ils devaient rétablir le sens de ce mot suivant les autres termes utilisés, suivant le contexte.

Une fois la relation « $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ » établie, l'enseignante propose une application à deux exemples où les valeurs de « a » sont données. L'énoncé du premier exemple est : « quand je prends le triangle équilatéral de côté 5 combien vaudra la hauteur, une hauteur ? ».

Cet énoncé fait intervenir l'article indéfini « une » qui semble corriger l'article défini « la ». Suite au deuxième exemple, l'enseignante entreprend la rédaction d'un petit texte résumant le résultat « général » auquel est parvenu la classe. En le rédigeant au tableau, l'enseignante dicte le texte, nous entendons : « dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure... ». Les deux cadres apparus précédemment semblent réapparaître : "*l'objet (le segment)* hauteur *a pour* mesure...".

[8] On pourrait croire que l'enseignante a voulu dire "la hauteur [AH]" : nous avons introduit la notation réservée aux segments qui signifierait que « la hauteur AH » est vue comme le segment. Dans ce cas, il faudrait préciser : "calculer *la longueur* de la hauteur [AH]".

Un élève intervient en répétant « la hauteur mesure » ce qui entraîne l'enseignante à apporter une correction :

« P - alors est ce que je peux dire la hauteur ?

« E - ouais

« P- une hauteur hein, les hauteurs, y'en a trois »

La correction effectuée, l'enseignante reprend la dictée du texte de résumé et l'achève en disant « une hauteur mesure ($h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$) », « une » confirme le cadre géométrique d'utilisation du mot « hauteur » puisqu'il sous-entend "une des trois hauteurs" ou encore "un des trois segments qui définit une hauteur".

Jusqu'à présent nous avons observé la présence de deux cadres dans les propos de l'enseignante. Nous pouvons considérer qu'elle en a explicité un à l'aide de la réponse au questionnement de l'élève portant sur l'article « la ». Nous voyons un autre problème poindre. L'enseignante a répondu d'un point de vue général : "tout triangle définit 3 hauteurs ". Nous questionnons : laquelle des trois mesure $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ? La réponse est simple : puisque le triangle est supposé équilatéral, les trois « hauteurs » ont même « mesure ». Nous ne trouvons pas d'argumentation semblable dans les propos de l'enseignante. Cette propriété pourrait expliquer qu'il n'est pas utile de préciser <u>la</u> hauteur dont la longueur est calculée, les trois hauteurs du triangle ayant <u>la</u> même longueur. Cette propriété permettrait de préciser que « la hauteur mesure... » ou « une hauteur mesure... » signifie « la longueur d'une quelconque des trois hauteurs est... ». Elle permettrait aussi de préciser que « calculer la hauteur » doit être entendu « calculer la longueur d'une (des trois) hauteur(s) ». De la sorte, le premier cadre dans lequel est utilisé le mot hauteur serait explicité et l'emploi de l'article « la » justifié, « la hauteur » étant la même pour les trois segments. Puisque l'enseignante ne rappelle pas cette propriété, il semble qu'elle estime son rappel inutile. Nous proposons à cette omission deux explications dont la première est : l'enseignante ne précise pas la propriété car elle attend des élèves qu'ils la formulent. Notre deuxième explication est la suivante : considérant cette propriété disponible pour les élèves l'enseignante juge inutile de la rappeler ou de la faire rappeler. Puisque l'enseignante n'interpelle pas les élèves sur la propriété, nous ne retiendrons pas la première explication. La réaction des élèves montre que même s'ils disposent de la propriété, ce n'est pas suffisant pour qu'ils rétablissent les cadres et certains usages de la langue parlée. Notre deuxième explication doit alors être complétée par une non-adaptation de l'enseignante à la situation que vit la classe, comme si l'enseignante ne remarquait pas cette insuffisance[9].

Enfin, notons la forme que prend l'énoncé du résultat : $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le problème posé était « déterminer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de celle d'un côté », il avait été particularisé à un triangle équilatéral ABC et au calcul de la longueur AH de la hauteur [AH] issue du sommet A ($H \in [CB]$). La généralisation du résultat aux hauteurs issues des deux autres sommets du triangle ABC, puis la généralisation à toute hauteur d'un triangle équilatéral est rapidement effectuée sans justification. Deux indices énoncés par la phrase 8 indiquent la généralisation « on a calculé pour le cas général » et « d'un sommet au pied de la hauteur ça fera toujours... ». Ces indices sont confirmés par l'écriture au tableau « $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ». La justification de la validité de cette relation est donc laissée aux élèves par l'omission de la propriété mentionnée plus haut.

L'étude de ce premier épisode nous permet de dégager les 2 résultats suivants.

1- Les élèves doivent eux-mêmes rétablir les cadres dans lesquels ils travaillent, cadres dont les contours sont flous et qui ne se distinguent, dans le discours de l'enseignante, que par des nuances subtiles à saisir.

2- Les élèves doivent eux-mêmes rétablir certaines justifications.

### *4.2- Second épisode*

Intéressons-nous maintenant à un exercice de la seconde partie du cours. L'enseignante écrit un énoncé au tableau : « la hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5 cm. Trouver x la longueur du côté ». Pour cet exercice se produit le même scénario décrit ci-dessus. Nous avons extrait les phrases où l'enseignante –lors d'échanges avec la classe– utilise les mots « hauteur » et « côté ».

> « x représente le côté, pour trouver l'équation, on doit calculer la hauteur en fonction de x... »

[9] Nous verrons la même chose dans le manuel.

« alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur »

« dans un triangle équilatéral de côté x… la hauteur mesure $x\frac{\sqrt{3}}{2}$ »

Pour chacune de ces phrases, nous remarquons les articles définis employés avec « hauteur » et « côté », nous remarquons également le cadre qui emprunte à l'analyse et à la géométrie. Au moment de rédiger, l'enseignante annonce ce qui va être écrit :

« P - donc on l'écrit ici, propriété... on commence par citer la propriété, dans un triangle équilatéral de côté x... la hauteur mesure x racine de 3 sur 2.

L'article de « hauteur » est l'article défini « la ». Une élève questionne :

E - Ah c'est général.

P - Hein ?

E - La hauteur.

Nous ne savons pas si l'élève demande "c'est général, dans un triangle équilatéral, les trois hauteurs ont pour longueur $a\frac{\sqrt{3}}{2}$" ou bien "la valeur $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ est vraie ici aussi i.e. le calcul effectué précédemment est vrai pour tout triangle équilatéral, pas seulement dans le triangle ABC du début du cours". La réponse de l'enseignante repose sur le même argument que celui de l'épisode 1, le nombre de hauteur dans un triangle :

P - T'as trois hauteurs alors tu peux pas dire, dans un triangle tu as trois hauteurs, tu peux pas dire

L'élève qui demandait si c'était général argumente :

E - Ici c'est la même.

Nous pouvons supposer que l'élève a voulu dire « c'est la même longueur pour les trois hauteurs » ou bien « les trois hauteurs sont les mêmes » dans le sens « les trois hauteurs sont confondues ». A cet argument, l'enseignante répond que les hauteurs sont distinctes :

P - On dit la hauteur issue... une parmi les trois »

L'enseignante répond d'un point de vue totalement décontextualisé, sa réponse est valable pour un triangle quelconque, équilatéral ou non. Elle ne profite pas de l'occasion pour préciser que le calcul précédent est « général » pour tout triangle équilatéral, que pour un même triangle équilatéral les « hauteurs » ont même « mesure », que les termes employés renvoient à différentes significations. La suite de la dernière intervention de l'enseignante est : « alors une hauteur mesure x racine de trois sur deux ».

La seule explication que donne l'enseignante pour motiver l'emploi de l'article indéfini « une » repose ici aussi sur le nombre de hauteurs dans un triangle. Il n'y a pas, ici non plus de référence à la nature équilatérale du triangle qui justifie de ne parler que d'une longueur identique pour les trois hauteurs. Le caractère général de la formule établie peut ainsi être rendu plus difficile à saisir, de même que les cadres dans lesquels les termes sont employés et par conséquent les sous-entendus associés à ces termes.

### *4.3- Troisième épisode*

La fin de la résolution de l'exercice énoncé au début de l'épisode deux porte de nouveau sur l'utilisation des articles définis ou indéfinis avec « hauteur » et « côté ».

« E - c'est une des longueurs

« P - oui mais le côté c'est le même partout

« P - donc la longueur du côté, la longueur du côté du triangle équilatéral... »

Cette fois, un élève précise qu'il s'agit d'une des longueurs : « c'est une des longueurs ». L'élève semble avoir appliqué au mot « longueur » ce que l'enseignante disait pour le mot « hauteur ». La précision que l'élève apporte sur l'article indéfini « une » est contredite par l'enseignante « oui mais le côté c'est le même partout ».

Nous notons une utilisation du mot côté dans le sens « la longueur du côté ». Ce qui nous permet de reformuler ainsi la réponse de l'enseignante « oui mais les côtés ont même longueur » : l'une des caractéristiques du triangle équilatéral est indiquée.

### *4.4- Conclusion*

Les trois épisodes de la classe peuvent être rassemblés en deux situations semblables qui donnent lieu à deux attitudes différentes de l'enseignante.

La première situation est le choix d'un article défini ou indéfini pour le mot hauteur. La deuxième situation est le choix d'un article défini ou indéfini pour le mot côté.

Pour ces deux situations, il fallait exprimer des résultats portant sur les longueurs des côtés et des hauteurs. Un argument de même nature pouvait être avancé : dans un triangle équilatéral, les côtés ont même longueur et les hauteurs ont même longueur. Pour la première situation qui se répète deux fois (épisode un et deux), l'enseignante n'utilise pas cet argument qui reste ainsi implicite, elle n'évoque que le nombre de hauteurs dans un triangle. Pour la deuxième situation (épisode trois), l'enseignante utilise cet argument sans préciser le nombre de côtés dans un triangle...

Nous avons aussi constaté que l'enseignante n'apporte pas de précision à l'emploi des termes « hauteur », « longueur » et « côté ». Suivant le contexte, les termes « hauteur » et « côté » veulent dire « segment ainsi désigné » ou bien « longueur du segment hauteur ou côté ». Tout se passe comme si l'absence de précision des termes et l'omission de l'argument de même longueur des hauteurs (segments) du triangle équilatéral entraînaient une confusion autour des articles définis ou indéfinis pour qualifier « hauteur » et « côté ».

Finalement, le questionnement sur l'utilisation d'un article s'inscrit dans un cadre plus large de pratiques orales constituées de sous-entendu, de substitution (d'abus de langage). A ces pratiques souvent justifiées par un gain de temps et un discours plus léger, s'est ajoutée l'omission d'une propriété importante. Ces deux facteurs ont engendré une situation que l'enseignante n'a pas démêlée.

Nous concluons à un « vide mathématique » que l'enseignante ne comble pas. Ce « vide » n'est pas hors de portée des élèves puisqu'il s'agit de certaines de leurs connaissances et qu'ils le questionnent, le comblant presque. L'enseignante ne le comble pas et ne saisit pas les situations qui conduiraient les élèves à le combler. En cela, ses connaissances de niveau (n+p) ne se sont pas manifestées en classe.

Nous proposons trois explications à notre constat.

1- L'enseignante estime que la charge de certaines justifications incombe aux élèves.

2- Suivant le contexte, certains savoirs sont plus mobilisables que d'autres. En effet, quand l'enseignante veut faire établir la formule ($h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$) dans le triangle équilatéral, le triangle n'est qu'un prétexte pour aboutir à l'utilisation de l'objet racine carrée, son attention est alors mobilisée par la « racine carrée », le triangle équilatéral et certaines de ses propriétés sont oubliées une fois qu'elles ne sont plus essentielles au calcul, surtout si elles ne semblent pas servir directement : les hauteurs ont même longueur. Cependant, d'autres propriétés de même nature semblent disponibles même si elles ont la même importance. Par exemple les côtés ont même longueur. La disponibilité des connaissances est sélective.

3- Indépendamment du contexte, certaines connaissances sont plus disponibles que d'autres. Entre autres connaissances, ce sont celles sur les côtés qui sont une première caractéristique des triangles équilatéraux puisque ceux-ci sont plutôt définis par leurs côtés que par d'autres propriétés : cette attitude ressemble à celle d'un élève.

Le vide mathématique que nous évoquons correspond à une partie du raisonnement à tenir pour le problème considéré. Ainsi nous pouvons conclure que tout se passe comme si la dévolution des raisonnements était interprétée par l'enseignante comme l'énoncé par les élèves de résultats (très) ponctuels. De la sorte ses connaissances n'agissent que pour effectuer à la place des élèves une partie de ces raisonnements ce qui revient à utiliser essentiellement des connaissances de niveau (n).

## 5- Conclusion de l'analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E1

Nous assistons à un cours où deux discours se complètent. L'enseignante conduit les élèves à faire fonctionner leurs connaissances d'un point de vue technique et de façon très ponctuelle. Elle les décharge de l'argumentation, de certaines contextualisations et décontextualisations. Elle prend en charge la structuration et le découpage en sous-tâches des activités proposées.

Nous avons dégagé trois situations particulières suivant le contexte associé aux interventions des élèves que nous détaillons ci-dessous.

*Première situation*

Les élèves émettent des avis, ce qu'ils disent est correct mais est différent de ce que l'enseignante attendait. Si leurs propos étaient adoptés, la suite à leur donner ne différerait pas (ou peu) de celle à laquelle nous assistons. Dans ce cas, nous avons constaté que l'enseignante se contente de reconnaître les connaissances exprimées, elles ne les institutionnalise pas. Nous avons établi le même constat dans le cas où le cadre implicite dans lequel se placent les élèves avec leurs propos est plus “léger” que celui proposé par l'enseignante : tout se passe alors comme si elle ne reconnaissait pas des cadres de travail “plus simples”. Entre autres, l'enseignante n'effectue pas de changement de cadre.

*Deuxième situation*

Les élèves émettent des avis que l'enseignante n'attendait pas et qui, s'ils étaient suivis, provoqueraient un changement dans la suite à donner au travail en cours. Dans ce cas, nous avons constaté que l'enseignante “s'adapte” aux élèves en adoptant un discours dont le contenu la conduit à préciser ce qu'elle attendait sans en changer. Les précisions peuvent parfois prendre la forme d'argumentation explicitant ce qui était attendu dévoilant une partie du projet didactique. Tout se passe comme s'il y avait un déplacement du projet didactique : les élèves ne sont plus sollicités pour établir ce qui était prévu, l'enseignante s'en charge et eux n'ont plus qu'à répondre à des questions très ciblées.

*Troisième situation*

L'enseignante reconnaît des erreurs ou prévoit des risques d'erreurs dans les propos des élèves. Dans ce cas, elle allège leur charge de travail convertissant la construction des connaissances en une application de niveau technique de celles connues.

D'autres échanges où nous n'avons constaté aucune de ces trois situations nous ont permis d'aboutir au constat suivant : les contours du discours de l'enseignante sont parfois flous rendant imprécis les cadres dans lesquelles évoluent les élèves. Des nuances importantes peuvent alors être difficiles à saisir et certaines explications peuvent paraître insuffisantes.

Dans l'ensemble la participation des élèves est réduite à des éléments très ponctuels et juxtaposés (sans liens apparents). L'enseignante décompose une partie du raisonnement mathématique qu'elle tient devant les élèves en ne leur montrant bien souvent que le résultat de ce raisonnement et ne les conduit pas à relier les éléments de cette décomposition.

Tout se passe comme si l'enseignante s'était fixé un scénario au moment où elle a préparé son cours, scénario qui agit comme un modèle dont elle s'écarte peu, quitte à jouer à l'élève en situation didactique notamment quand il faudrait abandonner le modèle. Le jeu de l'élève en situation didactique consistant à montrer ce qu'un élève devrait dire et faire pour répondre aux problèmes posés.

Il semble que le savoir hérité de l'université, en voie de recomposition, présente encore des trous, et que l'enseignante a du mal à s'y référer pour conduire les élèves à construire leurs connaissances.

Nous concluons donc à de timides traces de connaissances de niveau (n+p), peut-être contrariées par une difficile adaptation de l'enseignante aux élèves.

## *B- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E2*

La séance observée porte sur la trigonométrie dans le triangle rectangle. Les définitions de sinus, cosinus et tangente sont précisées, une propriété est abordée ainsi qu'un exercice[10].
Nous avons partagé le cours de l'enseignante E2 en 13 passages décontextualisés que nous avons regroupés suivant 5 thèmes : introduction, rappels, nouveau, mises en garde et application. Chacun de ces thème constitue un paragraphe de nos analyses. Le dernier paragraphe est réservé à la conclusion.

### 1- Les passages d'introduction

***Passages 1 et 10***

Passage 1

**♦ est ce que vous avez déjà fait de la trigonométrie ?** **SB**
**o Oui avec le cosinus par exemple.** **IC**
**• Donc de la trigonométrie on en a déjà fait dans le triangle rectangle d'accord.** **SB**
**• Et la trigonométrie cette année on la verra que dans le triangle rectangle surtout pas équilatéral.**
**mise en garde I + SB**
**• Alors on a vu le cosinus** **SB**
**• et l'année dernière lorsqu'on utilisait la calculatrice, vous aviez vu aussi qu'il y avait d'autres touches...**
**autre I**
**o Sinus oui** **IC**
**♦ et il y en avait une troisième** **autre I**
~~tan.~~
**♦ c'est quoi tan ?** **notation I**
~~tangente.~~
**o la tangente** **IC**
**• donc finalement dans le triangle rectangle on va voir trois définitions, celle du cosinus que vous connaissez que vous allez me rappeler, celle du sinus et celle de la tangente.** **SB**

Passage 10

• Grand deux application. Première application autre (organisation du cours)

[10] Pour plus de détail sur le plan, nous renvoyons à la comparaison au manuel (chapitre suivant).

**• calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle** **énoncé IT**

**• Faites très attention dans les exercices que lorsque vous utilisez sinus, cosinus et tangente vous soyez bien dans un triangle rectangle.** **I mise en garde**

• Parce que dans les autres triangles, ça marche pas. C'est bien plus compliqué que ça I mise en garde

• Alors on va travailler sur un exemple. SB

• On travaille dans un triangle rectangle ADE, rectangle en A, on connaît AD, on connaît DE et on voudrait connaître la mesure DEA. énoncé IT

• Donc l'angle DEA c'est celui-là. IC

• Habituez-vous à faire des triangles rectangles qui ne suivent pas les carreaux, les lignes hein. I mise en garde

• Parce qu'en fait c'est souvent qu'on vous en donne inclinés des triangles rectangles I mise en garde

• Alors la mesure de l'angle DEA, je vous précise quand même, au degré près. énoncé IT

• On verra que ça tombe peut être pas juste. IA

**• En général, un angle on le donne au degré près parce que c'est pas très intéressant de le donner au dixième de degré, parce qu'on sait pas trop ce que c'est hein.** **IC**

Commentaire

Nous assistons à des introductions dont les interventions sont essentiellement classées en discours de structuration et d'information.

Pour le passage 1, la structuration consiste en la juxtaposition d'informations ayant valeur de rappel de contenu, de précision et de mise en garde. Les élèves parlent peu. Ils sont consultés sur des points très précis :

> « est ce que vous avez déjà fait de la trigonométrie ?
>
> «d'année dernière lorsqu'on utilisait la calculatrice, vous aviez vu qu'il y avait d'autres touches (...) il y en avait une troisième
>
> c'est quoi tan ? »

L'enseignante semble vouloir attirer l'attention des élèves sur les triangles qu'ils auront à manipuler en trigonométrie :

> « la trigonométrie cette année on la verra que dans le triangle rectangle, surtout pas équilatéral »

Nous retrouvons une telle mise en garde dans le passage 10 :

> « faites très attention dans les exercices que lorsque vous utilisez sinus, cosinus et tangente vous soyez bien dans un triangle rectangle »

Au cours de ce passage 10, de même que pour le passage 1 les élèves reçoivent beaucoup d'information et ici, ils ne sont pas consultés.

Nous remarquons donc une tendance de l'enseignante à prendre en charge la structuration ainsi que le rappel des conditions d'application des outils mis en jeu.

Les passages 1 et 10 peuvent entraîner les élèves à éviter certaines erreurs. Ils ont à appliquer des définitions et l'enseignante crée un milieu où certaines de ces erreurs sont soulignées alors qu'apparemment, rien ne nécessite de telles préventions.

> « Habituez-vous à faire des triangles rectangles qui ne suivent pas les carreaux, les lignes hein.
> Parce qu'en fait c'est souvent qu'on vous en donne inclinés des triangles rectangles »

Voici une mise en garde bien particulière dont nous pouvons dire qu'elle dévoile un certain contrat constitué d'habitudes. Elle peut entraîner les élèves à s'interroger sur la "nature" rectangle des triangles rectangles et les conduire à bien remarquer « qu'être triangle rectangle » est une propriété du triangle indépendante du quadrillage des feuilles de cahier. Le discours de l'enseignante demeure spécifique au triangle cependant, un élève peut comprendre qu'il est bien question de l'angle droit du triangle rectangle qui « ne doit pas suivre les carreaux ». Un élève peut donc entendre qu'au-delà du triangle rectangle, il s'agit de considérer des angles. Le mot incliné souligne que les angles droits ne sont pas toujours constitués de secteurs angulaires dont les bords sont parallèles aux lignes et colonnes des feuilles de cahier. On peut traduire que ce ne sont pas les lignes qui définissent les secteurs angulaires droits mais d'autres caractéristiques (mathématiques) indiquées ou déduites des problèmes en présence.

Nous pouvons entendre dans le discours de l'enseignante une adresse implicite aux élèves dont l'objectif est de mettre en évidence la nécessité de prendre en compte les éléments mathématiques dont ils disposent et dont l'objectif est de relativiser ce qu'ils "voient" sur les dessins. Ainsi, ils sont invités à mobiliser leurs connaissances mathématiques.

Nous voyons avec ces deux passages une facette des connaissances de l'enseignante qui anticipe les gestes des élèves pour prévenir des erreurs. Nous constatons la vigilance que ses connaissances lui permettent d'exercer sur la situation. La disponibilité de ses connaissances permet à l'enseignante une vigilance mathématique qui peut conduire les élèves à une utilisation de leurs connaissances plus mobilisable que technique.

***Passage 9***

♦ **Alors le cosinus l'année dernière, on s'en servait pour quoi ?** **AC + SB**

~~pour calculer un angle ou alors un côté.~~

**o alors c'était parfois en effet pour calculer la mesure d'un angle et puis parfois aussi pour calculer** **IC**

~~un côté.~~

**o un côté ouais.** **IC**

**• Et bien le sinus et la tangente ça va être la même chose, ça va être des outils supplémentaires pour calculer encore des angles et des longueurs de côtés.** **AC**

• Alors on va noter ça en application. SR

Commentaire

Notre commentaire sera court : l'enseignante présente une utilité de ce qui est exposé. De la sorte, elle tente d'entrer dans la structuration des connaissances des élèves.

## 2- Les passages constitués de rappels

### *Passage 2*

Un triangle ABC supposé rectangle en A est tracé au tableau.

*Extrait :*

• On va commencer par un petit rappel sur le triangle, sur le vocabulaire qu'on utilise dans le triangle rectangle SE

♦ Alors comment s'appelle le côté BC ? IA

~~l'hypoténuse~~

o l'hypoténuse IC

• parce que c'est le côté définition IT

~~le plus long~~

o le plus long c'est vrai IC

**• c'est la plus grande longueur et opposé** **définition IT**

~~à l'angle droit~~

o à l'angle droit IC

o donc BC c'est l'hypoténuse. répétition IC

**• Toujours le plus grand côté** **définition IT**

o Alors si on regarde l'angle B cet angle-là, quel est le côté adjacent à l'angle B ? IA

~~AB~~

**♦ Adjacent ça veut dire quoi ?** **définition IT**

~~Qui touche l'angle~~.

**o Qui touche** **IC**

♦ Alors quel est le côté qui touche l'angle B ? IA

~~AB~~

o AB IC

• **En fait au départ, y'a deux côtés qui touchent l'angle B.** **IA**
♦ Et à votre avis AC on va l'appeler comment le côté AC ? IA
♦ Par rapport à l'angle B, par rapport à l'angle B, c'est quoi ? reprise IA
♦ J'ai entendu... reprise IA
~~côté opposé~~
~~le côté opposé~~
o le côté opposé. IC
♦ Et si on parle de l'angle C, ça va être quoi le côté adjacent à l'angle C ? IA
~~AC~~
o AC. IC
♦ Et le côté opposé à l'angle C ? IA
~~AB~~
o AB IC
• Donc dans un triangle rectangle finalement, le côté définition IT
• ici le côté opposé à l'angle B, c'est la même chose que le côté adjacent à l'angle C. Et le côté adjacent à l'angle B, c'est la même chose que IA
~~Le côté opposé à l'angle C~~.

Commentaire

Le contenu de ce passage est annoncé par la première intervention de l'enseignante :

« on va commencer par un petit rappel sur le triangle, sur le vocabulaire qu'on utilise dans le triangle rectangle »

Les rappels effectués ne sont pas simplement restreints au vocabulaire utilisé dans le triangle rectangle. Ils portent aussi sur les propriétés caractéristiques des notions rappelées par le vocabulaire. Nous relevons d'ailleurs, suite à l'intervention d'un élève « (côté adjacent veut dire) qui touche l'angle » la remarque de l'enseignante : « en fait au départ, y'a deux côtés qui touchent l'angle B». Ces côtés qui « touchent » l'angle B sont les côtés du triangle portés par les "bords" de l'angle de sommet B. On peut comprendre : « avant d'être rectangle, le triangle rectangle est un triangle, les "bords" d'un quelconque de ses trois angles portent chacun un côté. Chacun des deux côtés est adjacent à l'angle auquel il correspond. Allant au-delà, nous interprétons : le triangle est une partie du plan limitée par une ligne brisée fermée constituée de trois segments qui définissent les côtés du triangle. Nous pouvons voir cette partie du plan comme la définition de trois angles en prenant les côtés deux à deux et en les prolongeant... Chacun des côtés est adjacent à l'angle qu'il contribue à définir. Nous remarquons donc une réponse de l'enseignante directement provoquée par l'un des élèves, réponse qui présente une certaine importance pour le contenu traité. En effet, les propos de l'enseignante peuvent offrir aux élèves l'opportunité de réaliser l'importance de la dénomination des éléments utilisés en mathématique. Ici, le vocabulaire dénote une spécificité liée au triangle rectangle ; l'expression « côté adjacent d'un angle » (hors l'angle droit) est réservé au côté « qui le touche » et qui n'est pas l'hypoténuse.

Nous retiendrons donc de ce passage l'importance que l'enseignante accorde aux propos des élèves, ils sont relevés et commentés. Les commentaires dépassent la définition stricte des termes rappelés et montrent que l'enseignante dispose de ses connaissances quand la situation le permet. Elle est attentive aux situations qui peuvent conduire à dépasser le strict contenu des connaissances que les élèves ont à acquérir. En cela nous disons qu'elle met en œuvre des connaissances de niveau (n+p).

### *Passage 3*

| | |
|---|---|
| ♦ **Alors le côté adjacent, on s'en sert pour quoi ?** | **AC** |
| ♦ **Pourquoi est-ce qu'on s'en est servi l'année dernière ?** | **reprise AC** |
| ~~pour le cosinus.~~ | |
| o pour le cosinus. | IC |
| • On va rappeler un tout petit peu, alors grand un définition, | autre (organisation du cours) |
| ♦ alors puisqu'on a parlé de l'angle B, ça se note comment ?. | notation I |
| ~~cos B~~ | |
| o cos B | IC |
| • cosinus de B est égal à | définition IT |
| ~~côté adjacent sur hypoténuse~~ | |
| o voilà, côté adjacent sur hypoténuse oui, | IC |
| ♦ le sinus de l'angle B se note... comment on le note ? | notation I |
| o sin | IC |
| • c'est la même notation que la calculatrice. | notation I |
| • Sinus de B est égal à côté opposé sur hypoténuse. | définition IT |
| ♦ Et la tangente c'est un petit peu particulier la tangente, oui Ludovic ? | définition IT |
| ~~(inaudible)~~ | |
| o Oui | IC |
| • c'est très bien il connaît la leçon avant qu'on la fasse. | non classé |
| ♦ La tangente de l'angle B se note, vous avez dit que ça se notait ? | notation I |
| ~~tan~~ | |
| • côté opposé sur côté adjacent. | définition IT |
| • **Alors ces trois définitions il faut les connaître par cœur.** | **contrat I** |
| • **Alors si vous connaissez le cosinus, c'est facile de connaître le sinus. Par contre pour la tangente ben faut pas se tromper, c'est bien côté opposé sur côté adjacent.** | **mise en garde I** |

<u>Commentaire</u>

Le début de ce passage est la suite "logique" du précédent ; après avoir rappelé des définitions l'enseignante demande l'utilité de l'une d'elles. Ce début permet d'introduire le reste du passage consacré à l'énoncé de nouvelles définitions – cosinus, sinus et tangente – restreintes au triangle rectangle. Les définitions sont en partie contextualisées au triangle ABC supposé rectangle en A. La contextualisation est réduite à l'utilisation de la lettre B, sommet d'un des angles pour nommer cosinus B, sinus B et tangente B. Les "formules" précisant chacune de ces trois valeurs sont données indépendamment des lettres A, B et C, AB, AC et BC sont remplacés par côté adjacent, côté opposé et hypoténuse. Les définitions sont en partie décontextualisées. De cette façon, nous pouvons dire que l'enseignante utilise un triangle ABC "générique".

***Passage 5***

♦ **Alors est-ce que vous vous rappelez, le cosinus était compris entre quel nombre et quel nombre** — **propriété IT + SB**

~~1 et 9/ 1 et 10.~~

♦ **Alors déjà, c'est un nombre de quel signe ?** — **reprise propriété IT**

~~Positif.~~

o **Positif** — **IC**

• **puisqu'on a dit que c'était le rapport de deux longueurs d'accord.** — **AP**

♦ **Et sinon, il doit être plus petit que quoi ?** — **reprise propriété IT**

♦ **Est-ce que vous vous souvenez de ça ?** — **répétition, propriété IT**

~~d'AB (inaudible)~~

♦ **Plus petit que quel nombre ?** — **reprise propriété IT**

~~Que 1~~

o **Plus petit que 1** — **IC**

♦ **pourquoi ?** — **AP**

• **si vous regardez le rapport là** — **AP**

~~Parce que hypoténuse est le côté le plus grand.~~

o **Oui hypoténuse est le côté le plus grand** — **IC**

o **et quand on fait le rapport, on s'aperçoit** — **AP**

~~ben que hypoténuse c'est le dénominateur~~

o **eh oui.** — **IC**

• **Si vous regardez bien, peu importe la valeur de AB et de BC, c'est pareil pour n'importe quel triangle rectangle** — **AP**

o vous savez que BC c'est hypoténuse, c'est le côté le plus grand AB divisé par BC, AB il est plus petit que BC. — AP

o **D'accord et quand on divise un nombre par un nombre plus grand le résultat est toujours inférieur** — **AP**

~~à un.~~

o **oui,** — **IC**

♦ vous êtes convaincus ? — non classé

• Alors on va noter cosinus de l'angle B. SR

♦ **On avait vu ça l'année dernière que c'était entre zéro et un ?** **propriété IT + SB**

~~si~~

o il me semble hein. non classé

## Commentaire

L'aspect « rapport de longueurs » du cosinus d'un angle permet à la classe d'établir que dans le triangle rectangle, les valeurs prises par cosinus sont inférieures à 1 et sont positives. Nous retrouvons ici aussi le rôle "générique" du triangle ABC que nous notions ci-dessus (cf. passage 3) et que nous noterons au passage 4 (cf. infra § IV). L'angle de sommet B servira de support à la propriété qui sera notée (« cosinus B est entre 0 et 1 »). Le triangle ABC sert de figure et l'enseignante entraîne les élèves à noter qu'il n'est que cela. Dès le début du passage, pour montrer que « le cosinus est un nombre positif », elle précise qu'il s'agit d'un rapport de longueurs puis que la propriété de ce rapport d'être inférieur à (1) n'est pas spécifique aux valeurs AB et AC :

> « …on a dit que c'était un rapport de deux longueurs »
>
> « si vous regardez bien peu importe la valeur de AB et de BC, c'est pareil pour n'importe quel triangle rectangle… »

En conclusion, nous relèverons l'attention que l'enseignante porte à utiliser un triangle de façon générique. Les mises en garde effectuées et ce choix de présentation dénotent un aspect implicite du discours dont une conséquence peut être de conduire les élèves à éviter des erreurs en les conduisant à tenir compte de l'environnement mathématique auquel ils seront confrontés avec les rapports trigonométriques. L'enseignante utilise ses connaissances pour appeler les élèves à mettre les leurs en œuvre à un niveau plus mobilisable que technique.

## *passage 6*

♦ **Comment est-ce qu'on avait introduit le cosinus, on avait parlé de quoi ?** **AC**

♦ **Est-ce que je vous avais donné la définition comme ça : côté adjacent sur hypoténuse ?** **SB**

~~On avait fait l'application, on avait fait une activité avant~~

♦ **Oui c'était sur quoi ?** **SB**

♦ Oui d'accord une photocopie d'accord, non classé

♦ **qui parlait de quoi ?** **répétition SB**

~~y'avait des triangles rectangles~~

o **y'avait des triangles rectangles** **IC**

◆ **mais au départ on avait pas de triangles rectangles, je vous avais demandé de faire** **SB**

~~Ah oui avec les projections~~

o **les projections.** **IC**

◆ **C'est des projections comment ?** **IT + SB**

~~Orthogonales~~

o **orthogonales** **IC**

• **et on avait vu que le cosinus d'un angle, c'était le rapport de projections** **IT + SB**

~~orthogonales~~

o **orthogonales.** **IC**

Commentaire

La classe procède à des rappels de l'année passée. Nous avons donc classé l'essentiel du discours en structuration. Nous découvrons les connaissances que les élèves possèdent du cosinus. Une partie du vocabulaire utilisé (« cosinus d'un angle ») s'apparente à celui des fonctions (« f de x »). Une autre partie s'apparente à celui des nombres (« rapport de projections orthogonales » pour indiquer « rapport de longueurs »).

Ce passage peut montrer aux élèves que les angles sont importants pour la définition de cosinus, par suite pour celles de sinus et tangente aussi. En effet, tout ce qui précède est basé sur le triangle ABC, rectangle en A et sur les longueurs de ses côtés. Un élève peut comprendre qu'il faut toujours matérialiser un triangle rectangle ayant des côtés dont les longueurs sont déterminées pour calculer l'un des trois nombres cosinus, sinus ou tangente en utilisant ces longueurs. L'avantage que présente ce passage est qu'il dissocie cosinus et triangle rectangle. Il rapporte la valeur du cosinus à celle du cosinus d'un angle, cette valeur est celle d'un rapport de longueurs déterminées par l'angle et par des projections orthogonales, l'une de ces longueurs pouvant être arbitraire et l'autre s'en déduisant. Le triangle rectangle intervient comme un intermédiaire entre l'angle et le cosinus, ce qui peut annoncer un début de généralisation de cosinus : un élève pourrait (!) faire le lien entre le triangle ABC des passages précédents et cet autre aspect de « cosinus » pour conclure que le triangle ABC n'était qu'un support. L'étai de cette généralisation, la projection orthogonale, permet d'accéder à un autre point de vue où l'angle intervient. Nous voyons apparaître dans les propos de l'enseignante un résultat important lié à la classe d'équivalence qu'est l'angle : à "angle constant" (pour un angle, une classe d'équivalence), quelle que soit la longueur du segment qui sera projeté orthogonalement, « le rapport des projections » ne varie pas. Plusieurs représentant d'un même angle définissent la même valeur du cosinus : le cosinus d'un angle est indépendant du représentant choisi, il se rapproche ainsi de la définition d'une fonction. Nous lisons dans les propos de l'enseignante un lien implicite entre l'expression des rapports trigonométriques contextualisée au triangle rectangle et les fonctions trigonométriques.

Ce passage renforce ce que nous relevions en conclusion du passage précédent : les définitions de sinus, cosinus et tangente ne sont pas liées à un triangle précis. Le triangle ABC n'est qu'un modèle générique.

Ces enseignements déductibles des propos de l'enseignante nous semblent directement reliés à des connaissances de niveau (n+p) que l'enseignante ne peut donc exposer ici.

## 3- Passages où de nouvelles connaissances sont abordées

***Passage 7 et 12***

Le passage 7 porte sur les définitions de cosB, sinB, tanB et cosC, sinC tanC exprimées dans le triangle ABC supposé rectangle en A.

Le passage 12 expose l'utilisation de la calculatrice pour obtenir une valeur d'angle dont le sinus est donné.

Passage 7

| | |
|---|---|
| ♦ Alors qu'est ce que vous remarquez entre ce qu'on a écrit avec l'angle B et sur ce qu'on est en train d'écrire avec l'angle C ? | AP |
| ♦ Le cosinus de l'angle B, le sinus de l'angle B, la tangente de l'angle B et puis en dessous le cosinus de C, le sinus de C et la tangente de C, Qu'est ce qu'on remarque ? ça saute aux yeux... Caroline | reprise AP |
| ~~y'a partout un truc de pareil.~~ | |
| ♦ un truc de pareil, tu peux nous expliquer un petit peu mieux ? | répétition AP |
| ~~ben par exemple, cosB y'a BC dedans, et sinus B aussi.~~ | |
| o oui c'est-à-dire que BC, | IC |
| ♦ c'est quoi BC ? | IA |
| ~~C'est hypoténuse.~~ | |
| o hypoténuse | IC |
| **o c'est vrai que ça ne bouge pas dans n'importe quel angle** | **IC** |
| • quand on aura besoin de hypoténuse, ici ça sera toujours BC, | AP |
| **o c'est pour ça qu'on a la même chose hein parce qu'on a hypoténuse.** | **répétition AP** |

~~Le sinus aussi c'est pareil.~~

o oui IC

**o parce qu'on a le sinus, on a besoin de hypoténuse d'accord. AP**

~~oui et à côté aussi ah ben non c'est inversé~~

o alors là c'est inversé les numérateurs et dénominateurs sont inversés IC

~~oui~~

o D'accord, non classé

◆ j'aimerais bien que vous m'en disiez un petit peu plus sur les cosinus et les sinus là. reprise AP

~~(inaudible)~~

• alors BC c'est toujours le dénominateur, c'est normal puisqu'on a dit que c'était hypoténuse, elle ne change pas, qu'on parle de l'angle B ou de l'angle C. répétition AP

◆ Oui Julie ? non classé

~~Le cosinus de B c'est le sinus de C et le sinus de B, c'est le cosinus de C.~~

o eh oui si vous regardez ça IC

◆ c'est ce que vous vouliez dire ceux qui levaient la main ? non classé

o si vous regardez ça et que vous regardez ça ben c'est la même chose et ici aussi (d'accord ?) répétition IC

**• Donc dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre (hein ?) propriété IT**

**• quand les angles sont, on prend les deux angles complémentaires, pas l'angle droit. propriété IT**

**• Donc le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre et le sinus d'un angle, c'est le cosinus de l'autre. répétition, propriété IT**

• On va le noter en remarque. SR

• Remarque cosinus de B égal sinus de C, le sinus de B cosinus de C propriété IT

◆ et la tangente ? AP

~~c'est l'inverse.~~

o oui IC

**◆ comment est ce qu'on note l'inverse ? notation I**

~~un~~

o un IC

~~sur tangente de C~~

o voilà un sur tangente de C. IC

## Passage 12

◆ qu'est ce que tu as fait ? AC

~~sinus~~

o ah pas sinus non IC

~~sinus(inaudible)~~

o sinus moins un IC

**◆ c'est-à-dire qu'on fait...(?) définition IT**

**o le contraire d'accord c'est la fonction contraire. IC**

**◆ La fonction on appelle ça la fonction ? définition IT**

~~inverse~~

**o pas inverse parce qu'en fait inverse on le réserve plutôt à un sur quelque chose. habitude I**

**o On dit que c'est la fonction réciproque ou contraire. définition IT**

◆ Alors pour avoir sinus moins un, cette touche-là, pour faire ça, il faut peut être passer par seconde sinus, hein puisque c'est la fonction qui est juste au-dessus de sinus c'est ça ? non classé

~~oui~~

o C'est le contraire parce que là on connaît l'angle, on connaît le cosinus pardon le sinus, c'est deux tiers. AP

o Sur votre calculatrice, vous avez affiché zéro virgule six six six six six etc. IA

◆ on connaît le sinus mais on veut l'angle IA

~~faut qu'on passe au contraire~~

**o Quand on veut l'angle on fait sinus moins un,** **IC**
**• si on voulait le sinus on aurait tapé sinus.** **AM**
• Mais on connaît là le sinus. **AP**

Commentaire

Nous relevons ici deux points : l'adaptation de l'enseignante aux élèves et le vocabulaire de l'enseignante.

1- *adaptation*

Le passage 7 conduit au constat :

« P- Donc dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre hein ? quand les angles sont, on prend les deux angles complémentaires, pas l'angle droit. Donc le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre et le sinus d'un angle, c'est le cosinus de l'autre. On va le noter en remarque. Remarque cosinus de B égal sinus de C, le sinus de B cosinus de C et la tangente ?
« E- c'est l'inverse.
« P- oui »

Les élèves ne l'ont pas directement remarqué, ils ont vu autre chose sur les formules écrites au tableau :

« P- Qu'est ce qu'on remarque ? ça saute aux yeux... Caroline ?
« E- y'a partout un truc de pareil. »

L'enseignante commente en généralisant :

« P- un truc de pareil, tu peux nous expliquer un petit peu mieux ?
« E- ben par exemple, cosB y'a BC dedans, et sinus B aussi.
« P- oui c'est-à-dire que BC, c'est quoi BC ?
« E- C'est hypoténuse.
« P- hypoténuse c'est vrai que ça ne bouge pas dans n'importe quel angle quand on aura besoin de hypoténuse, ici ça sera toujours BC, c'est pour ça qu'on a la même chose hein parce qu'on a hypoténuse.
« E- Le sinus aussi c'est pareil.
« P- oui parce qu'on a le sinus, on a besoin de hypoténuse d'accord.
« E- oui et à côté aussi ah ben non c'est inversé
« P- alors là c'est inversé les numérateurs et dénominateurs sont inversés
« E- oui
« P- D'accord »

Elle demande aux élèves de remarquer autre chose :

« P- j'aimerais bien que vous m'en disiez un petit peu plus sur les cosinus et les sinus là
« E- (inaudible)
« P- alors BC c'est toujours le dénominateur, c'est normal puisqu'on a dit que c'était hypoténuse, elle ne change pas, qu'on parle de l'angle B ou de l'angle C. Oui Julie ?
« E- Le cosinus de B c'est le sinus de C et le sinus de B, c'est le cosinus de C.
« P- eh oui ... »

qui conduit au résultat attendu.

Ainsi, l'enseignante ne dévoile pas aux élèves ce qu'elle attend, elle commente en généralisant ce qu'ils disent. Nous pouvons relier cette généralisation aux passages 2 et 3 où étaient données les définitions de cosB, sinB et tanB indépendamment des côtés du triangle rectangle dont B était un sommet. L'enseignante souligne la décontextualisation effectuée sur les formules du début du cours : l'hypoténuse est ici BC et « ne change pas ». Nous remarquons donc que l'enseignante adapte son discours à la classe, généralise ce que les élèves disent mais ne dévoile pas son objectif.

*2- Vocabulaire*

Les deux passages montrent l'attention que l'enseignante apporte à préciser les termes « inverse » et « réciproque ».

Passage 7 :

« P- comment est ce qu'on note l'inverse ?
« E- un
« P- un
« E- un sur tangente de C
« P- voilà un sur tangente de C »

Passage 12 :

« P- ...c'est la fonction contraire
« P- la fonction... on appelle ça la fonction
« E- inverse
« P- pas inverse parce qu'en fait inverse on le réserve plutôt à un sur quelque chose. On dit que c'est la fonction réciproque ou contraire »

Ces précisions peuvent développer chez les élèves des associations entre des situations et du vocabulaire. Ainsi, ils peuvent déduire que « inverse » est plutôt associé aux nombres (« tangente C, un sur quelque chose ») et que « réciproque » est plutôt associé aux fonctions. L'utilisation spécifique des termes « inverse » et « réciproque » dévoile qu'il existe une distinction à apporter au vocabulaire suivant les situations, par conséquent que les situations ne sont pas les mêmes. Ces deux termes sont la trace d'autres connaissances : cosinus, sinus et tangente deviennent des fonctions. Leurs qualités de fonctions se manifestent par l'utilisation de leurs fonctions réciproques. Ils étaient au début des nombres, la qualité de « nombres » qu'ils représentaient est manifestée par le quotient de longueurs. Nous assistons à un changement de point de vue.

Nous déduisons avec ces deux passages des références à d'autres connaissances de niveau (n+p) liées à celles directement exposées.

## 4- Passages où les élèves doivent appliquer leurs connaissances

***Passage 4***

CosB, sinB et tanB ont été exprimés de façon "générique" à l'aide d'un triangle ABC (supposé rectangle en A cf. supra § II passage 3). Il s'agit ici de les contextualisées au même triangle.

*Extrait :*

• On va essayer d'appliquer ces formules, ces définitions au triangle rectangle ABC. SB
♦ Alors si je vous demande avec la figure... le cosinus de l'angle B Avec les différents côtés qu'on a là, qu'est ce que ça va être ? IA
~~AB sur AC~~
o Alors le côté adjacent à l'angle B c'était IA
~~AB~~
o AB donc AB sur l'hypoténuse BC d'accord. IC
♦ Le sinus de l'angle B ? IA
~~AC sur BC~~
o Le côté opposé c'est-à-dire AC sur BC... IC
• **toujours hypoténuse** **mise en garde I**
♦ et la tangente de B ? IA
~~AC sur AB~~
o AC sur AB IC
• **côté opposé sur côté adjacent.** **définition IT**
• Alors vous notez ça. SR
silence
• **si vous avez à trouver le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle, non seulement vous devez connaître vos définitions mais vous ne devez pas vous tromper en parlant du côté adjacent, du côté opposé, de hypoténuse. Faut bien repérer ça dans le triangle rectangle.** **mise en garde I + contrat, répétition I**
• **Alors le côté opposé, le côté adjacent, ils changent selon l'angle.** **mise en garde I**

<u>Commentaire</u>

La première phrase du passage (« on va essayer d'appliquer ces formules, ces définitions au triangle ABC ») tend à confirmer que les définitions introduites au passage 3 étaient générales et non spécifiques au triangle ABC puisqu'il s'agit maintenant de les appliquer. Les deux dernières interventions du passage nous permettent de corroborer ce point. En effet, l'enseignante attire l'attention des élèves sur la nécessité de bien identifier les côtés adjacent et opposé en fonction de l'angle dont il est question, elle attire donc leur attention sur les condition de validité des définitions introduites. Les élèves peuvent appréhender le rôle de la définition qui nécessite de reconnaître les conditions de validité qu'elle contient. Nous pouvons dire ici que l'enseignante montre aux élèves comment fonctionne une définition. Ceci nous conduit à conclure que l'enseignante utilise implicitement des connaissances ultérieures à celles de niveau (n).

### *Passage 13*

◆ Alors une fois qu'on a cet angle là, est ce qu'on peut connaître d'autres choses dans le triangle... qui nous manquent, qu'est ce qu'on pourrait calculer dans ce triangle-là ? AP
~~ben le côté (inaudible)~~
◆ Cécile ? non classé
~~L'angle D~~
◆ l'angle ? non classé
~~D~~
o l'angle D là oui IC
◆ comment est ce qu'on pourrait le trouver cet angle ? AC
~~l'angle A moins l'angle B~~
◆ chut... j'ai demandé à Céline, Ejouan non classé
~~dans un triangle la somme des angles est égale à 180, on peut faire~~
o 90 moins 42 degrés IC
~~ah ouais~~
o on fait 90 moins 42, on trouve D oui. IC
• Alors ça c'est la méthode la plus simple c'est bien, c'est la plus rapide aussi. autre I
**• Puisqu'on sait bien, on l'a appris en... y'a quelques années, que dans un triangle la somme des angles fait 180 degrés. AP**
o On connaît l'angle A qui fait 90, on connaît l'angle E qui fait 42 donc le dernier fera AP
~~48~~
o ouais 48. Vous êtes sûrs 48 degrés ouais d'accord. IC
◆ Est ce que... non classé
• alors on va noter hein, on écrira après la justification. SB
◆ Est ce qu'on peut connaître autre chose encore dans ce triangle ? AP
~~AE~~
◆ AE, en faisant comment ? AC
~~(inaudible)~~
◆ alors j'ai entendu oui ? non classé
~~Pythagore~~
o Pythagore c'est vrai. IC
◆ Qu'est-ce qu'on pourrait utiliser encore, oui ? AC
~~côté adjacent sur côté opposé~~
o alors côté adjacent sur côté opposé IC
◆ mais pour ça, il faudrait parler de quel angle ? AC
~~E euh non A~~
◆ il faudrait parler de quoi sinus, de cosinus, de tangente de quoi ? AC
~~non euh~~
~~côté opposé sur côté adjacent~~
~~la tangente de l'angle D~~
o la tangente de l'angle D IC
(...)

♦ On a parlé de la tangente de l'angle D est ce qu'on ne peut pas utiliser d'autres outils de trigonométrie là ? AC

~~côté opposé sur côté (inaudible)~~

• on connaît les deux angles, AM

• ça doit pas être bien compliqué. appréciation I

♦ Le cosinus de quel angle ? IA

~~Le cosinus de l'angle~~

o E IC

~~E~~

♦ parce que le cosinus de l'angle E ça va être quoi ? IA

~~AE sur~~

o AE sur DE d'accord. IC

♦ On a parlé du cosinus, on a parlé de la tangente, est ce qu'on peut prendre le sinus d'un angle là ici pour trouver AE ? AC

~~euh oui~~

o le sinus de l'angle D oui IC

(…)

Commentaire

Dans le triangle ADE rectangle en A et dont les longueurs AD et DE sont connues, une mesure de l'angle de sommet E vient d'être trouvée. La classe propose de donner une mesure de l'angle de sommet D. Deux calculs sont possibles :

- en utilisant la définition de cosinus D appliquée au triangle ADE,
- en utilisant la propriété des angles d'un triangle dont la somme est 180°.

Puisque le cours porte sur les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, nous pouvons penser que l'enseignante attendait des élèves qu'ils utilisent le premier calcul pour déterminer une valeur de l'angle de sommet E. La remarque que l'enseignante émet suite au calcul des élèves à l'aide de la somme des angles tend à confirmer ce point de vue. En effet, les deux seules méthodes connues des élèves sont les deux indiquées ci-dessus. Les élèves en ayant choisi une et le fait que l'enseignante remarque qu'elle est la plus simple, laissant ainsi apparaître un élément de comparaison, nous poussent à conclure qu'elle attendait l'autre calcul. Nous constatons ici la place que l'enseignante accorde aux propos des élèves : elle accepte leur calcul, le commente et ne tente pas – pour ce point – de les faire adhérer aux attentes que nous supposons être siennes.

## 5- Les passages de mises en garde

### *Passage 8 et passage 11*

Les interventions du passage 11 sont suscitées par la recherche d'une valeur de l'angle dont le sinus est 2/3.

Passage 8

• **Vous ne devez pas oublier que le sinus d'un angle, le cosinus d'un angle, la tangente d'un angle, ce sont des nombres, ce sont des nombres qui n'ont pas d'unité.** **propriété IT + I**

♦ **Pourquoi ils n'ont pas d'unité ?** **AP**

**o parce que c'est un rapport de longueurs, on a des centimètres ou des mètres au-dessus, pareil en bas donc le rapport n'a pas d'unité.** **AP**

Passage 11

♦ Alors est ce qu'on commence par écrire l'inverse de sinus puis ? AM

~~ça dépend des calculatrices~~

**o eh oui, ça dépend des calculatrices, certaines calculatrices, pour certaines calculatrices il faut d'abord écrire la fonction qu'on utilise** **AM**

o c'est-à-dire pour certaines calculatrices on écrira sinus et puis après faudra faire deux divisé par trois et ça affiche le résultat mais la plupart normalement des calculatrices que vous avez (bruit) Charles (bruit) Texas instrument là en général, vous avez des Casio assez simples, c'est pas la peine d'avoir (bruit) vraiment perfectionnées. Sur ces calculatrices-là vous êtes obligés d'écrire d'abord deux divisé par trois à la calculatrice AM

alors deux divisé par trois, faites-le à la calculatrice IA

♦ Est ce qu'y en a qui ont des calculatrices où il faut faire le sinus avant ? Natacha non classé

~~elle est pas là~~

♦ tu l'as pas là, tu sais faire ? non classé

~~oui~~

♦ alors faites-le à la calculatrice, ceux qui l'ont. répétition IA

• Alors faites bien attention à ce que votre calculatrice soit bien en mode degré. I mise en garde

• **Vérifiez déjà parce que vous savez que pour les angles il y a trois façons de faire, ou bien on mesure en degrés ou en radians ou en grades** I mise en garde

• et nous on travaille avec les degrés. Donc vous devez avoir sur votre calculatrice D E G ou quelque chose comme ça, vous devez voir afficher I mise en garde

Commentaire

Notre commentaire sera succinct. Les deux passages 8 et 11 constituent des mises en garde sur des erreurs que les élèves peuvent effectuer. Nous constatons la vigilance que l'enseignante exerce sur ces possibles confusions.

## 6- Conclusion de l'analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E2

Nous formulerons ces conclusions en quatre points :

1- La structuration des passages décontextualisés est prise en charge par l'enseignante.

2- L'enseignante adapte ses propos à ceux des élèves sans diminuer l'exigence de qualité ou de généralité (par rapport au niveau n) liée aux connaissances qu'ils transportent et n'hésite pas à indiquer ou à accepter plusieurs points de vue quand l'occasion se présente, voire à renoncer au sien.

3- Des traces de connaissances de niveau (n+p) sont apparues, liées à des considérations sur des supports (triangle ABC) et à des commentaires et remarques liés au vocabulaire utilisé par l'enseignante et les élèves.

4- L'insistance sur l'aspect décontextualisé de certaines parties peut conduire les élèves à commencer à construire certains gestes du mathématicien : les dessins ne sont que des supports de figures, les conditions de validité d'une définition sont importantes à vérifier. Nous aurions tendance à dire ici qu'il peut y avoir chez les élèves un début d'approche de la notion de « propriété mathématique ».

Nous assistons à un cours de niveau (n) où les connaissances ultérieures apparaissent mais ne sont pas explicitées. L'enseignante conduit les élèves à étendre le domaine de validité de leurs connaissances de niveau (n) avec spécification des contextes particuliers. Ces contextes particuliers peuvent paraître comme des détails très "locaux". Ici nous dirons que ce n'est pas le cas puisque l'enseignante évolue entre les deux points de vue évoqués : extension (implicite) du domaine de validité des connaissances et précision des contextes particuliers ; le particulier est placé dans un cadre plus général, un cadre générique. Ainsi la reconnaissances par les élèves du particulier peut leur être importante.

Dans l'ensemble la participation des élèves à la construction des connaissances est souvent favorisée. Les connaissances isolées de niveau (n) sont reliées entre elles et sont souvent présentées de façon assez générale malgré un contexte qui peut facilement être restrictif. Nous soupçonnons des développements que les élèves peuvent entrevoir lorsque l'enseignante laisse entendre que des connaissances peuvent avoir un domaine de validité plus large que celui connu et rappelé : un discours implicite proche des connaissances des élèves peut être décrypté dans les propos de l'enseignante en même temps qu'un discours d'un niveau plus consistant. Les élèves sont appelés à appliquer leurs connaissances à un niveau plus proche du mobilisable que du technique. D'autres connaissances que celles de niveau (n) sont mises en œuvre par l'enseignante soit pour présenter plusieurs aspects d'une même connaissance, soit pour adapter son discours aux interventions des élèves, adaptation sans "perte" d'exigence auprès des élèves.

## *C- Analyse des passages décontextualisés du discours de l'enseignante E3*

La séance que nous observons comporte deux parties, la première est constituée de corrections d'exercices que les élèves avaient à préparer chez eux, de nouvelles connaissances sont abordées en deuxième partie. Les interventions de l'enseignante que nous avons classées en "texte décontextualisé" apparaissent de plus en plus fréquemment à mesure que le cours progresse. Au début du cours, elles se présentent sous forme de précisions données en fonction de ce que font les élèves pendant qu'ils corrigent les exercices. Ces précisions font apparaître des généralisations, des explicitations mathématiques portant sur les quantités en présence ou sur les écritures. Nous trouvons aussi des explications de propriétés. Les premières interventions sont regroupées en passages courts, les suivantes constituent des passages plus longs. Nous avons identifié 16 passages décontextualisés que nous avons réorganisés en 4 groupes. Chaque groupe constitue un paragraphe. Le cinquième paragraphe est réservé à la conclusion. Nous présentons en début de paragraphe les caractéristiques essentielles des passages les constituant.

### 1- Automatismes et modèles

Les six passages (1, 3, 4, 5, 6 et 7) de ce paragraphe portent sur la première partie de la séance constituée de corrections d'exercices. Ils ne présentent pas d'unités de discours décontextualisé, cependant nous les trouvons intéressant pour les raisons suivantes : dans l'ensemble, pour ces passages, nous notons que dans ses échanges avec les élèves, l'enseignante appelle des automatismes (passages 1, 3, 4 et 5) ou bien des modèles (6 et 7). Parfois elle fournit des explications que les élèves pourraient donner (passages 4 et 5), notre interprétation des passages 6 et 7 nous conduit à penser que l'enseignante utilise effectivement ses connaissances propres, autres que celles exprimées en classe, mais que cette utilisation ne produit pas d'effet sur ce qui est exposé, comme si l'enseignante estimait déplacé une telle situation.

*Passages 1 et 3*

Passage 1

~~tu peux te décaler un peu à droite~~

| | |
|---|---|
| •Tu effaces le petit a Raphaël parce que sinon tu vas pas (bruit) | non classé |
| • donc ça nous donne | IA |
| ♦ pourquoi tu multiplies par deux racine de deux ? | AP |
| ~~par racine de deux~~ | |
| o oui racine de deux ça suffit. | IC + AM |
| • comme ça tu auras enfin bon pourquoi pas mais je veux dire après tu seras obligée de simplifier alors que si tu multiplies directement par racine de deux le numérateur et le dénominateur ça nous donne trois racine de deux sur | AP + AM |
| ~~sur deux~~ | |
| ♦ et les solutions de l'équation ? | IA |
| ~~ah oui excusez-moi~~ | |
| • en dessous | I habitude |
| ~~je peux effacer~~ | |
| o attends deux minutes t'as la place encore Delphine | non classé |

Passage 3

| | |
|---|---|
| ♦ bon qu'est ce qu'on remarque ? | AP |
| ~~trois fois trois~~ | |
| ♦ c'est ? | AC |
| o trois fois trois donc c'est trois au carré | IC |
| ♦ comment on peut réécrire tout ce terme là ? | AC |
| o C'est trois facteur de, trois facteur de x moins un au carré | IC |
| ~~puis je mets quatre x enfin quatre au carré~~ | |
| o si tu veux. | IC |
| ♦ Qu'est ce que tu vas faire maintenant ? | AC |
| ~~passer le quatre de l'autre côté~~ | |

Commentaire du passage 1

L'enseignante s'adresse à un élève qui a entrepris la résolution de l'équation :

$$(x-\frac{3}{2})(\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4})(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x)=0.$$

Il a produit deux solutions x = 3/2 et x = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et aborde la troisième : $x=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

L'enseignante relève le calcul que l'élève propose comme suite :

« pourquoi tu multiplies par $2\sqrt{2}$ ? »

L'élève propose alors un autre calcul que l'enseignante valide. Elle expose rapidement les situations qu'engendrent chacun des deux calculs évoqués et souligne que le second est plus "direct" :

« si tu multiplies directement par racine de deux... »

Elle motive ainsi le second choix. Le motif des deux calculs proposés est implicite mais semble connu de l'élève au tableau puisque ce dernier répond très facilement à la demande de l'enseignante.

Commentaire du passage 3

L'équation à résoudre est :

$9(3x - 1)^2 = 16$

L'enseignante demande aux élèves de formuler une remarque, demande à laquelle les élèves répondent sans hésitation :

« P- bon qu'est-ce qu'on remarque ?

« E- trois fois trois

De même que pour le passage 1, le motif de la transformation de 9 en $3^2$ et le non-développement de $[(3x - 1)^2]$ à l'aide d'une identité remarquable semble connu des élèves. L'enseignante ne leur demande pas de se prononcer.

Pour les passages 1 et 3, il semble que l'enseignante attende des élèves qu'ils consolident certains automatismes et juge inutile de développer des explications ou d'en solliciter des élèves.

***Passages 4 et 5***

Passage 4

| | |
|---|---|
| • bon alors Alexandre, ... ta factorisation.... tu t'es trompé déjà... dans un signe ~~c'est moins alors~~ | I mise en garde |
| o non, | IC |
| o là c'est plus | IA |
| • puisqu'on a transposé | AP |

• mais c'est dans ta factorisation que ça marche pas — I mise en garde, reprise
~~là c'est plus deux oui moins deux ouais moins deux x~~
o oui c'est moins deux x — IC
• parce que moins deux que multiplie moins deux x ça donne bien plus quatre x hein d'accord — AP
♦ bon est ce que cette factorisation là est la meilleure? — I appréciation
~~je ne sais pas j'ai pas factorisé~~
~~ben on factorise comment ?~~
~~ben on factorise pas~~
o en fait tu vas factoriser — IC
♦ qu'est ce que tu vois là ? Alexandre — AC
~~ben ça~~
o oui — IC
♦ alors qu'est ce que t'aurais pu faire comme factorisation à cette ligne là... pour voir tout de suite le moins un — AC
~~ben en fait on multiplie par moins un~~
o oui — IC
♦ alors t'as déjà multiplié par moins deux avant alors tu vas multiplier par moins...? — IA
♦ qu'est ce que tu aurais pu faire comme factorisation ? — AC répétition
~~multiplier par deux~~
o par plus deux — IC
o alors bon alors tu changes donc ça fait plus deux — IA
o mais c'est faux ce que tu as mis à l'intérieur de la parenthèse à ce moment là, ça nous donne voilà — IC + I mise en garde
[bruit]
•o bon alors c'est bon ce que tu fais bon alors — IC

Passage 5

• bon le dix-huit maintenant. — non classé
• bon le petit a y'a pas besoin de vérifier. — I appréciation
♦ Stéphanie regarde ton livre dis moi les résultats les solutions des équations du dix-huit — IA
• alors x carré égal quatre, x carré moins quatre égal zéro. X carré égal quatre, x égal racine de quatre (l'enseignante lit ce que l'élève a écrit au tableau) — non classé
♦ et ça donne x égal racine de quatre ? — IA
~~x égal deux~~
♦ ou ? — IA
~~x égal moins deux~~
•o ou moins deux — IC
•o n'oublie pas hein alors avec ce qu'on a vu hier hein, x carré moins quatre ; x carré moins deux carré. Egalité remarquable : x moins deux facteur de x plus deux d'accord. — AP

Commentaire du passage 4

L'élève au tableau résout l'équation :

$$(2x - 5)(4x - 3) = 10 - 4x$$

Il a écrit : $(2x - 5)(4x - 3) - 10 + 4x = 0$

puis $(2x - 5)(4x - 3) - 2(5 + 2x) = 0$

L'enseignante relève une erreur :

« P- bon alors Alexandre, ... ta factorisation.... tu t'es trompé déjà... dans un signe

Aidé de l'enseignante, l'élève trouve l'erreur :

« E- c'est moins alors

« P- non, là c'est plus puisqu'on a transposé mais c'est dans ta factorisation que ça marche pas

« E- là c'est plus deux oui moins deux ouais moins deux x

L'enseignante donne une explication :

« P- oui c'est moins deux x parce que moins deux que multiplie moins deux x ça donne bien plus quatre x hein d'accord »

L'erreur corrigée, l'enseignante signale une autre factorisation :

« P- bon cette factorisation-là est-ce que c'est la meilleure ? »

Les élèves ne comprennent pas :

« E- je ne sais pas j'ai pas factorisé

« E- ben on factorise comment ?

« E- ben on factorise pas

L'enseignante insiste et semble désigner un lieu précis :

« P- en fait tu vas factoriser qu'est ce que tu vois là ? Alexandre

« E- ben ça

« P- oui, alors qu'est ce que t'aurais pu faire comme factorisation à cette ligne là... pour voir tout de suite le moins un

« E- ben en fait on multiplie par moins un

Enfin elle conclut

« P- oui, alors t'as déjà multiplié par moins deux avant alors tu vas multiplier par moins...? Qu'est-ce que tu aurais pu faire comme factorisation ?

« E- multiplier par deux

« P- par plus deux alors bon alors tu changes donc ça fait plus deux »

Il n'y a pas d'explication indiquant pourquoi on peut factoriser, en aidant l'élève au tableau à corriger son erreur, l'enseignante le conduit à faire apparaître une factorisation.

Nous constatons une situation dont la conclusion est semblable à celle des passages 1 et 3 : l'enseignante attend des élèves qu'ils produisent des automatismes. Cependant, en elle-même, la situation diffère légèrement des situations précédentes puisque les élèves ne semblent pas reconnaître ce que l'enseignante attend d'eux. Une autre différence réside dans les développements que l'enseignante effectue à la place des élèves pour expliciter partiellement ce qu'elle attend que nous interprétons comme la production d'automatismes.

Commentaire du passage 5

Notre commentaire sera succinct.

Nous retrouvons les conclusions des passages 1 et 3 : l'enseignante attend des élèves qu'ils mettent en place certains automatismes ;

> « On n'oublie pas hein alors avec ce qu'on a vu hier hein, x carré moins quatre ; x carré moins deux carré. Egalité remarquable : x moins deux facteur de x plus deux d'accord »

Nous retrouvons également les constats du passages 4 : l'enseignante fournit elle-même les arguments que les élèves devraient développer pour résoudre les exercices.

***Passage 6***

L'équation à résoudre est :

$-3x^2+18=0$

*Extrait :*

- Attention ton trois — I mise en garde
- **ça n'a pas beaucoup d'importance on a quand même la différence de deux carrés même s'ils sont dans le mauvais sens. — I mise en garde + I habitude**
- Ton trois il n'est pas au carré fais attention. Et n'oublie pas le moins devant. — I mise en garde

Commentaire

L'enseignante insiste (« on a quand même ») sur une formule générale (« la différence de deux carrés ») ce qui permet par exemple d'introduire l'idée, reprise dans un autre passage, d'utiliser les identités remarquables. Le rappel de la formule générale peut aussi expliquer par un résultat de cours les solutions que l'élève au tableau a obtenues sans appliquer les identités remarquables.

Il nous semble ici que « pas beaucoup d'importance » est en "concurrence" avec « mauvais sens ». Apparemment, l'enseignante veut signifier que « l'importance » n'est pas dans le « sens » (l'ordre) de l'écriture des termes. Mais l'expression « mauvais sens » laisse entendre qu'un sens est meilleur que d'autres. Ainsi, avec la première expression une idée de la relativité de l'ordre d'écriture des termes est introduite, en même temps qu'une certaine forme d'habitude d'écriture soulignée par la deuxième expression. Cette idée est renforcée par l'affirmation de la présence d'un modèle connu (« on a quand même la différence de deux carrés »).

Nous voyons dans cette intervention deux choses :

- la commutativité de l'addition qui permet à l'enseignante d'affirmer que ($a^2 - b^2$) est la même chose que ($- b^2 + a^2$) ; c'est une différence de deux carrés,
- l'importance des modèles (dans le sens où ils sont "à reconnaître") fournis par les identité remarquables.

La commutativité est peu développée. L'utilisation de modèle prédomine avec, en corollaire, l'idée qu'un sens est meilleur que l'autre.

Ce qui permet de faire apparaître un résultat de niveau (n) – utilisation des identités remarquables quel que soit l'ordre d'écriture des termes – qui repose sur l'utilisation d'autres connaissances dont la commutativité de l'addition, est évoqué mais peu développé. Ceci nous permet de conclure que l'enseignante se réfère facilement, pour elle-même, à ses connaissances. Mais en présence des élèves, on peut ressentir l'impression qu'elle se réfère plutôt à des modèles, jouant sans doute sur une reconnaissance des formes. Tout se passe comme si en évitant de laisser apparaître des éléments de connaissances qui ne sont pas du programme de la classe de Troisième, elle s'interdisait d'entraîner les élèves à constater leurs conséquences.

***Passage 7***

*Extrait :*

- tu as oublié quelque chose on n'oublie pas la deuxième racine I mise en garde
- **il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a faits quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la deuxième solution. I mise en garde**

**• Alors que quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord (?) »** **AM**

Commentaire

Des expressions laissent entendre une référence aux équations du second degré : « égalité remarquable », « différence de deux carrés », « deuxième racine ». La dernière expression doit être entendue comme « deuxième solution », ce sens est rétabli par la dernière intervention du passage. L'enseignante désigne une erreur : « il a oublié à chaque fois la deuxième solution » en lui donnant une "explication mathématique" qui renvoie aux « racines » : « il a fait les équations comme on les a faits quand on a traité les racines ». Elle indique une erreur en désignant deux éléments de connaissances des élèves. De la sorte, elle institue une différence entre ces deux éléments « équations » et « racines », sans la préciser ou la développer : elle ne fait que dire. Nous voyons apparaître trois utilisations du mot racine.

1- Racine carrée positive d'un nombre positif qui définit un nouveau nombre dans l'univers mathématique des élèves de Quatrième et de Troisième.

2- Racine carrée positive d'un nombre positif et opposé de cette racine carrée qui peuvent indiquer les solutions d'une équation et qui montrent que le nouveau nombre « racine de... » possède le même statut mathématique que les autres : on opère avec lui comme avec les autres nombres.

3- Racine d'une équation pour signifier que le nombre appelé racine est solution d'une équation.

Nous déduisons la troisième utilisation de l'intervention « on n'oublie pas la deuxième racine ». Seules les deux premières utilisations sont connues des élèves de Troisième, la troisième provient directement des connaissances de l'enseignante.

Il y a ainsi, vraisemblablement, comme un amalgame entre la définition de la racine carrée d'un nombre et la résolution des équations du second degré. Le facteur "responsable" étant, croyons-nous, la présence du "carré", c'est-à-dire de la puissance deux, indicatrice du degré de l'équation et du nombre maximum de solutions.

Nous rétablissons les propos de l'enseignante comme suit : « un polynôme du second degré possède au plus deux solutions qui peuvent être obtenues en le factorisant et qui parfois ne peuvent être écrites qu'à l'aide du symbole √. Ce symbole est le même que celui que nous avons rencontré quand nous avons vu qu'il existait des nombres appelés racine carrée, il signifie la même chose... ». L'identification aux équations du second degré est sous-jacente mais non explicitée. Son explicitation pourrait permettre de justifier la factorisation au moyen d'identités remarquables que l'enseignante indique et que les élèves connaissent. Elle permettrait de pointer la différence de situation qui existe avec la définition de la racine carrée d'un nombre puisqu'il semble que l'erreur, attribuée à l'élève au tableau, soit la confusion entre les deux situations "équation du second degré" et "définition de la racine". Tout se passe comme si l'enseignante voulait que les élèves mobilisent la définition de la racine carrée pour résoudre certaines équations du second degré dont celle au tableau, mobilisation initiée par le seul énoncé de titre.

Nous retiendrons de ce passage les deux points ci-dessous.

- L'enseignante a "expliqué" l'oubli de la deuxième solution en mentionnant les confusions occasionnées par la situation ; racine d'un nombre, racine d'une équation du second degré, identité remarquable. Ces éléments de connaissances ou de savoirs sont ceux des élèves (niveau n). Les liens entre eux, la possibilité de pouvoir justifier la validité ou l'invalidité de l'un d'entre eux suivant la situation, suivant le problème à résoudre et la capacité de pouvoir les démarquer entre eux en situation de classe nous paraissent des éléments de connaissance de niveau supérieur au niveau (n).

- Dans les propos de l'enseignante, nous ne trouvons pas d'explications mais des affirmations comprenant des indications succinctes d'un passé de la classe (« il a fait... comme on les a faits quand on a traité les racines ») et la dernière étape d'une méthode (« quand on fait avec les identités remarquables ») sans liens entre ces propos. Ceux-ci ne sont peut être pas évidents aux élèves. Bien que présents, ils ne sont pas explicites et sont à peine suggérés.

Tout se passe comme si l'enseignante voulait développer chez les élèves un niveau mobilisable de leurs connaissances, cette volonté n'étant traduite que par des éléments de raisonnement disjoints.

Nous dirons donc que pour ce passage les connaissances de niveau (n+p) ne sont pas utilisées par l'enseignante devant les élèves pour les conduire à structurer leurs connaissances et analyser les situations qu'ils ont à traiter. Cependant des traces sont présentes dans le discours ou la forme du discours.

## 2- Une adaptation aux élèves pas toujours aisée

Nous présentons ici cinq passages (8 à 12) mais n'en développons que deux (9 et 12), les trois autres s'apparentent au passage 9. Les cinq passages montrent que l'enseignante utilise partiellement ses connaissances pour s'adapter à la classe, cette adaptation passe par l'utilisation de ce que les élèves écrivent au tableau.

***Passage 8***

♦ Bon alors x carré égal moins cinq

~~pas de solution~~

o voilà pas de solution IC

• **Quel que soit le nombre x, x carré est un nombre positif donc il ne peut pas, on ne peut pas trouver de nombre tel que son carré soit négatif donc il n'y a pas de solution. AP**

Commentaire

Il s'agit d'une explication qui va être reprise au cours du passage 9 qui suit. L'éclairage que nous apporte le passage 9 nous montre qu'il s'agit ici d'une explication directement "décontextualisée", tirée du contexte.

Ce passage étant fortement lié aux suivants, nous ne conclurons rien pour l'instant, nous y reviendrons après analyse des passages suivants.

***Passage 9***

• Et alors Clément, x carré égal moins cinq ; x carré égal moins racine de cinq. (l'enseignante lit ce que l'élève a écrit au tableau) non classé

• Bravo il faut réfléchir un petit peu hein I appréciation

~~et si au lieu de le mettre à droite on le mettait à gauche~~ ?

o même ça ne change rien. IC

o T'auras moins x carré moins cinq égal zéro, c'est pas possible. AP

~~Par les identités remarquables.~~

o Par les identités remarquables, on en a pas non plus parce qu'on aura x carré plus cinq égal zéro. AP

~~non si on passe le x de l'autre côté, ça donne moins cinq moins x carré égal zéro et après on met moins cinq au carré~~

~~non c'est pas possible~~

♦ alors tu veux faire moins x carré moins cinq égal zéro alors quelle identité remarquable ? AC

~~moins x moins racine de cinq facteur de moins x...~~

♦ **~~alors a carré moins b carré qu'est ce que tu considères comme le a et comme le b ?~~** **~~AM ou AC~~**

~~ben moins x~~

~~moins x~~

~~oui mais là x~~

**~~o et alors après tu vas faire racine de moins x~~** **IA**

**~~o bon c'est pas, d'ailleurs on peut pas,~~** **IC**

**~~o j'veux dire bon x pourquoi pas c'est un nombre négatif~~** **AP**

**~~o mais de toute façon, mais même, réfléchis,~~** **I**

**appréciation**

**~~o je veux dire t'as moins x carré c'est un nombre négatif alors x carré est un nombre positif ou nul vous êtes d'accord moins x carré donc ça sera un nombre négatif d'accord.~~** **AP**

**o si tu fais moins un nombre négatif moins cinq , il peut <u>pas</u> être égal à zéro, c'est pas possible hein d'accord.** **IA**

**o Ca se voit encore mieux là, x carré quel que soit le nombre x hein x carré est un nombre positif. Donc il ne peut pas être égal à un nombre négatif c'est pas possible x carré c'est un nombre positif ou nul t'es d'accord, quel que soit le nombre x.** **AP**

**o C'est la règle des signes, c'est ce qu'on a vu l'année dernière. Le produit de deux nombres d'un même signe est un nombre négatif.** **AP + IT propriété**

~~ouais d'accord~~

<u>Commentaire</u>

L'enseignante interpelle l'élève au tableau sur ce qu'il a écrit « $\sqrt{-5}$ ». L'exercice à résoudre est le même que celui expliqué lors du passage 8. L'élève propose une méthode de résolution (une identité remarquable) que l'enseignante accepte en lui demandant de poursuivre. Il s'agit alors de faire apparaître une contradiction pour montrer que la méthode ne s'applique pas. La classe réagit et l'enseignante essaie de mettre à profit ce que les élèves disent en prenant « moins x ». Ici aussi, comme pour le passage 7, apparaît la racine et cette fois l'idée que le nombre dont il faut extraire la racine carrée est positif « racine de moins x... j'veux dire bon pourquoi pas c'est un nombre négatif... ». La classe ne réagit pas, aucune contradiction n'apparaît et l'enseignante propose une autre explication en reprenant l'expression qu'un élève voulait exploiter : $-x^2 - 5 = 0$. Cette nouvelle explication aboutit à un résultat qui, suivant les termes de l'enseignante, peut sembler évident : (« il peut pas être égal à zéro c'est pas possible hein, d'accord ») sans autres explications. L'évidence n'est tout de même pas claire, il manque une étape et l'enseignante utilise une autre expression encore écrite au tableau : $x^2 = -5$.

Ici, l'enseignante a tenté trois essais, tous proposés par les élèves ; elle a rapidement abandonné les deux premiers. Le dernier s'est révélé efficace. Le premier nécessitait la manipulation d'un produit remarquable. Les deux autres évitaient cette manipulation.

Nous trouvons intéressant le premier puisqu'il donnait l'occasion d'utiliser ce que l'enseignante présentait comme moyen efficace de ne pas se tromper quelques instants plus tôt (« quand on fait les identités remarquables... on est sûr de pas se tromper ») moyen confirmé ensuite (« bon alors soit on les résout avec les identités remarquables... »). Par ailleurs, nous y trouvons l'intérêt d'utiliser les connaissances de niveau (n) exigibles des élèves en fin de Troisième. Le deuxième essai est aussi intéressant, il permet de reprendre au niveau (n) des connaissances de niveau (n - p) : la somme de deux nombres négatifs est négative, elle ne peut donc être nulle. Le troisième repose sur un argument de même nature, le signe positif de $x^2$ est précisé, ainsi $x^2$ ne peut être strictement négatif.

Notre conclusion ici est que l'enseignante a préféré "profiter" d'une écriture au tableau pour laquelle peu de justifications étaient à fournir, elle a successivement adopté puis abandonné deux propositions des élèves qui nécessitaient un appel à des justifications non encore explicitées.

La première proposition réclamait de fournir des explications à propos de connaissances de niveau (n) (pourquoi dans le cas $- x^2 - 5 = 0$ ne peut-on pas s'inspirer du "modèle" $a^2 - b^2$). La deuxième proposition s'est achevée moins détaillée qu'elle n'a commencé (l'enseignante montre que $- x^2$ est un nombre négatif puis conclut directement que l'expression $- x^2 - 5$ est non nulle sans transition). La troisième proposition pouvait être reliée à la première en la présentant comme un moyen de confirmer l'impossibilité pour les élèves de factoriser $(-x^2 - 5)$ à l'aide du "modèle" $(a^2 - b^2)$.

L'enseignante a finalement retenu une explication qui semble détachée des deux premières propositions et qui ne fait pas intervenir spécifiquement des connaissances de niveau supérieur au niveau (n). Nous dirons que l'enseignante a partiellement adapté son discours à la classe.

Pour ce passage, comme pour les passages 5 et 7, nous concluons à une présence dans le discours des connaissances propres de l'enseignante mais tout se passe comme si elle ne les mettait pas à profit pour conduire les élèves à dégager des éléments pertinents de la situation, pour conclure et relier leurs connaissances.

***Passages 10 et 11***

Passage 10

• J'ai vu faire mais le deuxième c'est aussi impossible. IA
~~ben le troisième aussi (bruit)~~
~~bon ben les trois sont impossibles~~
♦ alors pourquoi c'est impossible ? AP
o deux x carré égal moins cinq IT énoncé
**o deux x carré est un nombre positif quel que soit le nombre x** **AP**
~~c'est pour ça que j'ai fait ça~~
**o donc multiplier par un nombre positif il peut pas avoir un nombre négatif d'accord (?)** **AP**
o Donc c'est partout impossible et pareil pour le dernier. IA

Passage 11

**• d'accord hein alors pour le moment on sait pas les résoudre on saura les résoudre plus tard mais pour le moment on sait pas.** **SB**
**• Même problème x est un nombre, x carré est un nombre positif ou nul, multiplié par un nombre positif, ça peut pas être égal à un nombre négatif** **AP**
• si on a quatre x carré, là c'est équivalent à quatre x carré égal moins seize chut... hein c'est complètement équivalent à quatre x carré égal moins seize. AP

Commentaire

L'explication donnée au passage 8, finalement reprise au passage 9 est de nouveau donnée pour ces deux passages. Nous ne les commenterons donc pas davantage.

***Passage 12***

o je passe le, je passe entre guillemets le quatre de l'autre côté ça te donne moins seize égal quatre x carré c'est d'accord (?) AP
~~ouais~~
o que je peux lire quatre x carré égal moins seize ou alors je fais moins quatre x carré égal plus seize ou quatre x carré égal moins seize d'accord. AP
♦ Bon voilà qu'est ce qui a Nadine ? I autre
~~on passe le seize de l'autre côté euh moins quatre x carré égal plus seize vous pouvez pas mettre moins quatre x carré égal non moins quatre x carré moins quatre carré égal~~
~~**o bon alors soit on les résout avec les identités remarquables comme on a fait hier les équations produits. Là on est capable de le faire puisqu'on a en fait**~~ ~~**AM**~~
~~o on a quatre x carré plus seize égal zéro.~~ ~~IT énoncé~~
~~**o On n'a rien, on a aucun moyen à notre disposition pour le mettre sous la forme de produit de facteurs de premier degré d'accord**~~ ~~**AM**~~

**o bon alors on peut les résoudre avec les racines comme on a fait l'autre fois hein** AM
o donc il faudrait ça voudrait dire qu'on devrait écrire racine de ça égal racine de ça. IA
o Mais ça t'as pas le droit d'écrire parce que moins quatre x carré c'est un nombre négatif d'accord. AP
~~ben oui mais ça fait moins racine de quatre x carré~~
o x carré est un nombre positif donc moins quatre x carré est un nombre négatif AP
~~mais oui mais~~
o donc on n'a surtout pas le droit de mettre ça IC

Commentaire

Il s'agit d'un passage d'ordre méthodologique qui répond à la tentative d'un élève de résoudre une équation. L'enseignante évoque deux façons de résoudre les équations du second degré : avec les « produits remarquables » ou bien avec « les racines ». L'équation que l'élève essaie de résoudre n'admet pas de solution réelle. L'enseignante justifie ceci avec la deuxième façon, en rappelant l'impossibilité qu'il y a d'identifier un nombre positif à un nombre négatif. La tentative de l'élève permet à l'enseignante de conclure.

La conclusion ressemble à un résumé remarquable. En effet, l'enseignante relie les identités remarquables aux « équations produits », c'est-à-dire à la factorisation sous forme de produits de facteurs de premier degré qu'elle explicite d'ailleurs grâce à l'exemple « (...) le mettre sous la forme d'un produit de facteurs de premier degré ». En même temps, tout se passe comme s'il y avait un message aux élèves du type : « appliquer une identité remarquable permet de résoudre une équation du second degré », car l'enseignante précise « là on est capable de le faire ». Puis, les élèves peuvent comprendre que, s'il n'est pas possible d'appliquer une identité remarquable, alors il n'est pas possible de transformer les expressions sous forme de produit de facteurs de premier degré et par suite, qu'il n'y a pas de solution. Nous interprétons les propos de la sorte puisque l'enseignante précise : « on a aucun moyen à notre disposition pour mettre sous la forme de produit de facteurs de premier degré » et que le moyen dont elle a parlé auparavant est l'utilisation de produits remarquables. Ensuite, l'enseignante confirme une autre façon de résoudre : « on peut les résoudre avec les racines » mais elle utilise ce cas en l'illustrant de l'exemple en cours qui mène à une impossibilité.

Ainsi, nous entendons deux développements indiquant deux situations : « il est possible que parfois dans une équation pouvant se ramener à la forme $ax^2 + b = 0$ vous ne reconnaissiez pas une identité remarquable. Deux situations peuvent se produire : l'équation à résoudre admet des solutions ou bien elle n'en admet pas. Dans le premier cas, on exprime la valeur de $x^2$, on utilise la définition de la racine carrée positive d'un nombre positif, sans oublier que l'opposée est aussi solution. Dans le second cas, on procède de même et on conclut que $x^2$ étant positif, il ne peut être strictement négatif ».

Ce discours permet à un élève de résoudre une équation même s'il n'a pas reconnu d'identité remarquable. Il peut également permettre d'expliquer pourquoi certaines équations n'admettent pas de solution.

Les deux situations que nous développons sont évoquées par le discours de l'enseignante mais ne sont pas totalement explicitées. Un élève peut ne pas rétablir ce développement et retenir que "identité remarquable" et "racines" ne sont pas qu'exceptionnellement liées. Ainsi le discours de l'enseignante peut rester flou pour les élèves. Ce flou nous incite à dire que les connaissances de niveau (n+p) sont présentes mais que l'enseignante ne les met pas à profit pour s'adapter aux élèves et que, tout se passe comme si l'enseignante voulait développer chez les élèves un niveau mobilisable de leurs connaissances tout en ne laissant apparaître que des éléments de raisonnement disjoints.

## 3- Deux discours décalés

Ce paragraphe ne comporte qu'un seul passage, le passage 2 qui illustre la présence de deux discours en classe[11].

***Passage 2***

| | |
|---|---|
| ♦ où c'est qu'il a oublié le moins ? | I autre |
| ~~là j'ai oublié le moins~~ | |
| ~~parce que~~ | |
| o attends attends on va écouter d'abord ce que dit Guillaume | I autre |
| ~~est ce qu'il y a un moins devant deux racine de deux sur trois ?~~ | |
| o oui y'a un moins | IC |
| o puisque tu as un moins racine de sur trois | AP |

[11] C. Comiti, D. Grenier, C. Margolinas (1995) définissent un phénomène didactique en terme de "dédoublement de la situation" pour rappeler que la situation supposée par le professeur n'est pas celle dans laquelle évolue un nombre non négligeable d'élèves ».

~~donc quand on le passe y'a plus le moins~~

o attends tu l'passes pas là tu divises, I habitude + AC

• tu l'passes entre guillemets hein, tu divises là... Entre guillemets, tu divises là... I habitude (répétition) + AC

• c'est une non classé

~~tu peux pas si tu l'passes~~

~~puisque là~~

o oui oui non mais non non c'est bon ce que t'as fait IC

**• attention Guillaume, ça c'est une équation de la forme a x égal b avec a différent de zéro hein** **I mise en garde + IT propriété**

**• donc la solution c'est b sur a d'accord** **IT propriété**

o bon tu passes, le moins il reste là d'accord (?) IA ou AP[12]

~~alors je le laisse ?~~

o oui oui c'est bon IC

~~mais alors y'a le moins~~

~~y'a moins moins~~

o non c'est pas moins x IC

• parce que justement il a divisé directement par moins deux racine de deux sur trois donc c'est pas moins x. En effet si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par deux racine de deux sur trois ce qui revenait au même après puisque tu trouvais moins.... et deux racine de deux sur trois » AP

<u>Commentaire</u>

Les échanges sont suscités par la résolution de l'équation $-\frac{2\sqrt{2}}{3}x = -1$.

La présence du signe moins du coefficient de x pose problème et un élève exprime son questionnement :

« est ce qu'il y a un moins devant deux racine de deux sur trois ? »

Ensuite il énonce un constat – qui peut être un théorème-en-acte – portant sur le signe moins : lorsqu'un scalaire précédé du signe moins « passe » d'un membre d'une équation à l'autre, il faut supprimer le signe moins ;

« donc quand on le passe y'a plus le signe moins ».

[12] Nous hésitons pour le classement de ce passage. En effet, nous l'interprétons de deux façons différentes. Chacune de ces interprétations nous conduit à un classement spécifique. La première est la suivante : l'enseignante et les élèves comprennent de la même façon le mot « passer » dans cette situation ; comme une opération. En conséquence, le résultat de cette opération est que « le signe moins reste là ». La seconde est la suivante : l'intervention précédente de l'enseignante tendait à faire prendre conscience aux élèves que l'opération entre x et deux racine de deux sur trois est un produit et que c'est pour cette raison que « passer » veut dire ici diviser. La mise en évidence (implicite) de l'opération et par suite l'étape qui en découle explique pourquoi le signe moins doit « rester là ».
La première interprétation est caractérisée par le classement IA comme résultat d'une opération. La seconde est caractérisée par le classement AP comme explication d'un résultat.

L'enseignante relève ce théorème-en-acte et essaie d'attirer l'attention de l'élève sur l'opération mathématique effectuée :

« tu l'passes pas là, tu divises »

« tu l'passes entre guillemets hein tu divises ».

Le terme « passer » semble recouvrir deux sens qui se rejoignent souvent :

- changer de membre dans l'équation ; le scalaire $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ « passe » du premier membre au second membre de l'équation,

- effectuer une opération dans les deux membres de l'équation ; « on divise » les deux membres de l'équation par $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

La deuxième signification ayant souvent pour conséquence de voir « passer » d'un membre de l'équation à l'autre le scalaire avec lequel l'opération est effectuée, et la première signification ayant souvent pour conséquence de voir "disparaître" un signe moins.

Il y a deux niveaux d'analyse. Les élèves voient le cas particulier du nombre précédé d'un signe moins, l'enseignante voit ce nombre comme un coefficient de x retenant ainsi l'élément essentiel à la résolution de l'équation. L'analyse de l'enseignante englobe la signification du signe et permet d'expliquer son maintien après avoir « passé » le coefficient de x. Pour exposer son analyse elle précise qu'il s'agit d'une division sous-entendant que le sens de « passer » s'apparente davantage au deuxième sens qu'au premier. Cependant cet éclairage ne permet pas directement de comprendre "ce qu'il faut faire avec le signe moins", en effet, les élèves commentent :

« tu peux pas si tu l'passes »

« alors je le laisse ? ».

La raison pour laquelle il faut diviser n'est pas précisée bien que l'enseignante insiste sur l'opération division du début à la fin du passage, la raison pour laquelle le signe moins est maintenu n'apparaît pas non plus. Les éléments d'explications qu'elle a donnés apparaissent ensuite avec le passage décontextualisé sous la forme d'une équation générale : « c'est une équation de la forme ax = b (...) » que nous désignerons par modèle dans ce qui suit. Le modèle fait apparaître un produit « ax ». Dans la classe, tout se passe comme si l'enseignante voulait faire jouer un double rôle au modèle « ax = b ». Le premier rôle est de faire apparaître l'opération entre a et x afin de déduire l'opération à effectuer sur les deux membres de l'équation pour obtenir x et afin de constater que le scalaire a est toujours le « même » quel que soit le membre de l'équation dans lequel il se trouve. Le deuxième rôle peut être celui d'une "recette" à appliquer : au modèle d'équation correspond un modèle de solution. Le premier rôle permet de comprendre l'apparition de la division et permet de comprendre que le signe négatif de $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ « reste là » avec $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ dans le deuxième membre de l'équation, il répond implicitement au questionnement des élèves. Les élèves doivent comprendre : « puisque x est multiplié par un scalaire négatif, la division des deux membres de l'équation par ce même scalaire va permettre de donner la valeur de x et le signe moins qui permet d'identifier le scalaire comme négatif va "passer" ou "rester" avec lui, ce qui explique le résultat avec le signe moins ». Le deuxième rôle indique un résultat sans explications. Les deux rôles nécessitent d'identifier « ax » à $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}x)$ soit « a » à $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$. La réaction des élèves le montre, certains d'entre eux ne saisissent aucun des deux rôles.

L'enseignante a adopté le point de vue des élèves en corrigeant « passer » par « diviser » puis a adopté un autre point de vue qui repose sur le modèle « ax = b ». Elle a corrigé une partie du théorème-en-acte des élèves et a changé ce théorème en un modèle qui peut ressembler à une recette. Les deux points de vue indiquent des conséquences « en actes » : « on le passe » a pour conséquence « y'a plus le signe moins » et le modèle est « ax = b » a pour conséquence la solution est « x = b/a ». En même temps la forme du discours a changé, le premier point de vue était contextualisé, le second est décontextualisé. Entre les deux points de vue un lien est apparu : la division. La raison pour laquelle il faut diviser, raison qui montrerait en même temps le devenir et le sens du signe "moins" origine de la série d'explications, n'est pas explicitée.

Nous concluons ici que les connaissances de niveau (n+p) de l'enseignante qui auraient pu lui permettre, par exemple, d'amener les élèves à remarquer que « a » est négatif (signe moins) et qu'ainsi "le quotient par a" ou "le produit par un sur a" (division) qui va conduire au résultat cherché, va en même temps "montrer où doit finalement se situer le signe moins", sont évidemment présentes. Mais il manque un lien. Plus exactement, ce lien est présent mais son explication est absente. Les nombreuses interventions des élèves nous laissent penser qu'ils semblent éprouver des difficultés à rétablir les explications à l'aide des seuls propos de l'enseignante. Nous assistons à « un dédoublement de la situation[13] » : de l'extérieur, nous avons l'impression qu'il y a deux discours dans la classe, celui des élèves et celui de l'enseignante qui ne se répondent pas directement. Tout le monde parle de la même chose mais différemment et l'enseignante n'adapte pas totalement ses propos à ceux des élèves qui ne semblent pas complètement saisir ce qu'elle dit.

Remarquons encore que l'enseignante ouvre la possibilité à une autre explication « en effet si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par deux racine de deux sur trois ($\frac{2\sqrt{2}}{3}$) ce qui revenait au même... ». Cette autre explication très rapidement abordée aurait pu conduire à évoquer l'opposé ou le produit par moins un et ainsi peut être aider les élèves à saisir le lien qui nous semble leur manquer.

Tout se passe comme si les automatismes de l'enseignante ne lui permettaient pas de “redescendre” au niveau des élèves ou comme si elle voulait les obliger à interpréter tout de suite une situation ($-\frac{2\sqrt{2}}{3}x$) en ax estimant plus simple de résoudre ax = b que ($-\frac{2\sqrt{2}}{3}x$) = -1.

Tout se passe comme si l'enseignante attendait des élèves que leurs connaissances soient mobilisables en leur montrant les savoirs isolés abstraits à contextualiser simplement.

### 4- Les autres passages

Nous abordons les quatre derniers passages (13 à 16) qui portent sur la deuxième partie de la séance observée. Nous aurions pu classer le passage 15 avec les passages du premier paragraphe. Par souci de lecture plus aisée, nous avons conservé l'ordre chronologique de son apparition.

[13] Voir l'avant dernière note.

*Passage 13*

| | |
|---|---|
| • **bon allez on passe aux inéquations** | **non classé** |
| • alors vous prenez votre cours. | non classé |
| • Bon on refera des exercices, je vais vous en donner pour la prochaine fois. | I autre |
| • **Alors les inéquations cette année on va puisque nous on avait déjà fait l'année dernière, y'a rien de nouveau hein par rapport à ce qu'on a vu l'année dernière** | **SB** |
| • **on va juste en résoudre en plus des systèmes d'inéquations à une inconnue hein.** | **SB** |
| • **On est toujours à une inconnue** | **SB répétition** |
| ~~ah parce que y'en a qui sont aussi~~ | |
| **o on verra à deux inconnues plus tard.** | **SB** |

Commentaire

Ce passage marque la fin de la première partie du cours consacrée à la correction du travail que les élèves avaient à faire chez eux. Commence alors une autre partie qui correspond à celle intitulée « inéquations » du chapitre trois « équations - inéquations à une inconnue » du manuel.

C'est un passage de structuration où l'enseignante précise les limites du travail sur les inéquations pour l'année en cours (« on va juste en résoudre en plus des systèmes d'équations à une inconnue »). Elle utilise ce point de structuration pour indiquer ce qui doit déjà être connu (« les inéquations (...) on avait déjà fait l'année dernière ») et suite à l'intervention d'un élève, ce qui pourra être vu un autre jour (« on verra à deux inconnues plus tard »). La suite du cours et la précision que l'enseignante apporte « y'a rien de nouveau » nous permettent de dire que dès le début, elle associe les propriétés sur les inéquations, connues des élèves, à la résolution de celles-ci, association qui peut permettre aux élèves de structurer plus facilement leurs connaissances. Cette association nous montre aussi la facilité que l'enseignante a de relier plusieurs connaissances et l'importance qu'elle donne à ces associations. Par cette liaison, il lui sera alors possible d'évoquer les propriétés en cas de problèmes d'incompréhensions des élèves.

Nous voyons ici par ces liens (même s'ils sont évidents) une facette des connaissances (n+p) de l'enseignante concernant la prévention d'erreurs et la structuration des connaissances pour les élèves.

*Passage 14*

• **Alors premièrement petit a, on va rappeler les règles d'ordre et d'addition (bruit)** **SE**
• **Bon alors vous vous souvenez ce qu'on avait vu l'année dernière avec inéquation** **SB**
(bruit)
• **Alors quand on a résolu les inéquations l'année dernière on avait avant** **SB répétition**
(bruit)
**o on a donné des règles des inégalités oui. On avait donné des règles pour savoir justement après résoudre les inéquations.** **SB**
**♦ Est ce que vous vous souvenez ? c'est les mêmes équations...** **non classé**
~~à quelque chose près~~
**♦ à quelque chose près ?** **non classé**
~~les signes~~
~~ah oui y avait des signes au lieu d'avoir~~
**o alors si on avait** **non classé**
~~au lieu d'avoir égal, on avait plus grand~~
**o voilà les inégalités** **IC**
**o déjà si on avait** **non classé**
~~non mais y'a des signes~~
~~un truc avec égal ça serait~~
**o non ça serait des égalités** **I habitude**
**♦ si on avait a par exemple hein strictement inférieur à b on peut avoir inférieur ou égal, supérieur ou égal qu'est ce qu'on avait de** **SB + IT énoncé**
~~ça faisait moins a supérieur à moins b~~
**o Alors d'abord l'addition,** **SE**
**♦ donc si on additionne le même nombre à chaque membre de l'inégalité** **IT énoncé**
~~a plus c inférieur à b plus c~~
**♦ a plus c, et alors il est comment par rapport à b plus c ?** **IA**
~~inférieur, plus petit~~
**o alors quels que soient les nombre a, b et c et on avait donné comme règle quels que soient les nombres a, b, c ; a plus c et b plus c sont rangés dans le même ordre que a et b.** **IT propriété**
• **Par exemple si a est supérieur à b alors a plus c est supérieur à b plus c. Bon y'a les trois hein ; supérieur ou égal, strictement inférieur, inférieur ou égal** **IA**

Commentaire

Nous ne ferons que des remarques.

Le début de ce passage est un appel à la mémoire. Il constitue une introduction au développement qui va suivre du passage précédent. Nous pouvons le voir comme une introduction de ce qui va être fait en termes précis : « on va rappeler les règles d'ordre et d'addition ».

Nous trouvons ici explicitée la raison des rappels de connaissances des élèves sur les inéquations « on avait donné des règles pour savoir justement après résoudre les inéquations ».

Des interventions d'élèves permettent à l'enseignante de préciser des éléments de vocabulaire : « voilà les inégalités », « ça serait des équations ».

La fin du passage est consacrée à des rappels sous forme de résolution d'exercice portant sur une propriété qui est ensuite énoncée.

***Passage 15***

| | |
|---|---|
| (bruit) | |
| ♦ hein ? **Après quand on résout les inéquations, on fait** | **non classé** |
| [bruit] | |
| **o avec les crochets oui** | **IC** |
| **o on va voir ça après.** | **SB** |
| (bruit) | |
| • Alors petit b | non classé |
| ♦ **quand est ce que** (bruit) **ça change ?** | **I autre** |
| **o alors justement quand est ce que ça change de côté, on va voir** | **SE** |
| ~~de quoi, les crochets ou les signes ?~~ | |
| **o les sens de l'inégalité** | **IA** |
| • **alors changer de côté c'est plutôt changer le sens de l'inégalité** | **I habitude** |
| ~~c'est quoi les crochets~~ ? | |
| ~~ben tu sais (bruit) comme ça ou bien comme ça~~ | |

Commentaire

Nous assistons à une discussion où les élèves échangent entre eux et avec l'enseignante. La classe est bruyante et nous distinguons difficilement les propos des élèves. Il semble cependant que l'objet du cours leur rappelle beaucoup de souvenirs et ils en font état. Ce passage permet à l'enseignante d'enchaîner sur la suite « justement quand est-ce que ça change de côté, on va voir » en précisant en même temps des propos d'élèves « changer de côté, c'est plutôt changer le sens de l'inégalité ». Cette petite phrase peut signifier qu'une inéquation est constituée de « côtés » ou membres et d'un signe d'inégalité, que seuls les termes ou facteurs constituant les membres de l'inéquation « changent de côté », le signe d'inégalité lui, change de sens. L'enseignante exerce une vigilance sur le vocabulaire des élèves, vigilance que nous pouvons relier à l'utilisation du verbe passer du passage 1. Notre analyse du passage 1 et cette vigilance répétée nous conduisent à conclure que l'enseignante interprète les propos des élèves et leur répond en émettant le résultat de ses interprétations sans indiquer les raisons des interprétations. Tout se passe comme si elle utilisait ses connaissances sans les mettre à profit pour les élèves, comme si elle ne s'adaptait que partiellement à la classe.

*Passage 16*

• Alors petit b, ordre et multiplication SE
~~c'est quand on multiplie~~
• alors là, au lieu d'ajouter aux deux membres de l'inégalité, on va multiplier. IT énoncé
♦ Alors vous vous souvenez comment il faut, quand on multiplie par un nombre c alors différent de zéro hein SB + IA
~~ben si~~
♦ alors il change tout le temps de sens ? IA reprise
~~il change quand y'a un nombre négatif~~
o voilà il change si c est un nombre strictement négatif IC
• on va le montrer après SB
♦ et si c est un nombre strictement positif alors IA
~~ça change pas~~
o le sens de l'inégalité ne change pas. IC
• Alors on va marquer ça. SR
• Quels que soient les nombres a et b, si c est un nombre strictement positif alors le produit ac et le produit bc sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b. Si c est nombre strictement négatif alors ac et bc sont rangés dans l'ordre inverse de a et b. IT propriété
♦ Alors par exemple si on a, juste un exemple hein, si on a deux nombres a et b tels que a soit inférieur ou égal au nombre b alors on va les multiplier par un nombre c strictement positif alors qu'est ce qu'on va pouvoir dire? IT énoncé + IA
~~ac plus grand ou égal à~~
♦ plus grand ? IA
~~plus petit~~
o plus petit ou égal, inférieur ou égal à IC
~~bc~~
♦ et si on les multiplie par un nombre d strictement négatif IA
~~et bien ad inférieur euh supérieur ou égal à~~
o supérieur ou égal à bd. IC
• Alors on va le démontrer dans le cas, là par exemple, a inférieur ou égal à b. SE
♦ Démonstration alors a inférieur ou égal à b qu'est ce que ça veut dire du signe euh enfin du signe de a moins b ? IA
~~il est positif non non qu'est ce que je raconte~~
♦ si a est plus petit que b qu'est ce qu'on peut dire de a moins b ? IA répétition
~~négatif~~
o négatif IC
o donc on peut dire que a moins b est inférieur ou égal à zéro d'accord ( ? ) IC
♦ Si c est positif qu'est ce qu'on va pouvoir dire du prod... du signe du produit de a moins b par c ? IA
~~négatif~~
o il sera négatif hein IC
• règle des signes. AP
• Règles des signes hein un nombre positif par un nombre négatif donne un nombre négatif. IT propriété
• Alors on développe, distributivité AC + IT propriété
~~ac moins bc~~
♦ alors si le produit, la différence de deux produits est négative qu'est ce qu'on peut dire ? IA
~~ac et~~
♦ comment ( ? ) euh si on compare les produits ac et bc IA reprise
~~ac est inférieur ou égal~~
o à bc d'accord (?) IC + IA

**• alors on a développé là, distributivité pas de problème**

**AC + IT propriété (répét.) + I appréciation**

**• donc on a la différence des deux produits ac et bc qui est négative donc ac est plus petit que bc.**

**IA**

**♦ Bon alors si d est négatif (Jérôme qu'est ce qu'y a ?) alors si d est négatif alors qu'est ce qu'on va pouvoir dire du produit a moins b ?** **IA**

~~il est supérieur ou égal~~

**o donc on a un nombre négatif.** non classé

(C'est la fin du cours)

Commentaire

Nous pouvons diviser ce passage en deux parties. La première partie introduit les dernières propriétés dont les élèves peuvent avoir besoin pour résoudre les inéquations. Elle constitue un rapide rappel des différents cas de figure qui risquent de se présenter aux élèves : "effet du produit d'une inégalité par un scalaire en fonction du signe de celui-ci".

La deuxième partie est un développement détaillé des deux cas (de figure) qui s'ensuivent.

Nos commentaires ici se réduiront à des remarques :

- l'enseignante précise chaque étape des différents calculs,
- l'enseignante choisit et utilise un vocabulaire très précis,
- l'enseignante assortit de propriétés certaines des étapes essentielles afin de les justifier.

L'enseignante se livre à une démonstration où les pas importants sont mis en valeur. Ces mêmes pas pourront être nécessaires aux élèves sur des cas particuliers afin qu'ils comprennent leur utilité et sachent les appliquer.

Dans l'ensemble, pour ce passage les élèves parlent peu et ne trouvent pas de difficultés à répondre aux questions qui leur sont posées.

Nous constatons que les connaissances sont bien en place chez les élèves, qu'elles sont plutôt de niveau (n-p) (classe de Quatrième). Il est cependant nécessaire qu'elles soient sues des élèves. Nous notons dans les propos de l'enseignante une attention particulière aux détails de passage d'une étape à une autre ainsi qu'au vocabulaire employé. Nous interprétons cette attention surtout comme une prévention d'erreurs possibles dans les résolutions de problèmes par la suite. Ainsi, le contenu des connaissances exposées ne présente pas de changement avec celui de la classe de Quatrième, il est plutôt de niveau (n) voire (n-p). Un petit complément aurait pu être apporté en précisant que les nombres a, b et c peuvent aussi être des racines carrées... Le développement du contenu laisse apparaître une attention qui s'apparente plutôt à des niveaux supérieurs ou égaux au niveau (n).

## 5- Conclusion des analyses des passages décontextualisés du discours de E3

Au cours de la correction des exercices, nous avons constaté que l'enseignante évoquait des modèles ($ax = b$, $x = b/a$ ; $a \neq 0$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ) de sorte à entraîner les élèves à les appliquer aux cas particuliers présentés par les exercices.

Au cours de la deuxième partie de la séance (à partir du passage 13) nous avons constaté que l'enseignante apportait une attention particulière à la démonstration de certains résultats qui serviront de règles par la suite.

Les interventions des élèves ont montré qu'ils avaient besoin de refaire sur des cas particuliers (exercices) les démonstrations générales et qu'ils ne pouvaient pas encore appliquer les résultats démontrés en toute généralité.

L'application automatique du général au particulier n'est pas encore acquise par les élèves et l'enseignante fait comme si c'était le cas. Elle n'utilise pas ses connaissances de niveau (n+p) pour favoriser cet automatisme en reproduisant les gestes du général sur le particulier. Elle utilise ses connaissances pour interpréter les propos des élèves et préciser comment on obtient le particulier à partir du général, sans montrer le pourquoi.

Tout se passe comme si l'enseignante choisissait les moments où ses connaissances devaient être mises en œuvre et excluait l'éventualité de revenir sur ces choix malgré leurs conséquences sur les élèves.

Il se dégage des échanges de la classe l'impression que deux discours coexistent – celui de l'enseignant et celui des élèves – et ont du mal à se rencontrer comme si l'enseignante avait du mal à s'adapter à la classe et ainsi à utiliser de diverses façon ses connaissances pour favoriser l'apprentissage des élèves.

Finalement, nous avons remarqué trois caractéristiques dans le discours de l'enseignante.

1- Les connaissances de niveau (n+p) sont présentes par leur conséquences dans le discours quand il s'agit de prévenir des erreurs.

2- Ces mêmes connaissances sont présentes à d'autres moment mais de l'extérieur : leur utilité pour les élèves semble limitée.

Tout se passe comme si l'enseignante évitait de les faire agir lorsqu'il serait nécessaire de le faire pour entraîner les élèves à établir des liens entre différents points abordés sur un même sujet et comme si elle se limitait à appeler les élèves à mobiliser leurs connaissances simplement en pointant quelques-unes d'entre elles.

3- Lorsque l'occasion se présente, l'enseignante laisse entrevoir aux élèves plusieurs possibilités d'action.

## *D- Conclusion des analyses des passages décontextualisés et des études des répartitions des unités de discours*

Notre conclusion sera succincte, nous indiquerons les grandes lignes des conclusions de chacune des analyses auxquelles nous adjoindrons ensuite la conclusion des répartitions des unités de discours.

Conclusion par enseignante

*Enseignante E1*

L'enseignante réduit l'action des élèves malgré – ou à cause – de leurs sollicitations. tout se passe comme s'il y avait une stratégie d'évitement et un repli sur le particulier dès l'instant où les élèves interviennent de façon différente de ce que l'enseignante attendait.
L'enseignante expose ses connaissances de niveau (n) suivant un éclairage contextualisé, elle est limitée par cet exposé dans les échanges avec les élèves.
Les connaissances de niveau (n+p) ont alors peu de chance d'être mobilisées, et c'est effectivement ce qui se passe : tout se passe comme si l'enseignante limitait d'elle-même ses références.

*Enseignante E2*

L'enseignante s'adapte aux élèves, elle crée des situations où les élèves ont des chances de construire leurs connaissances.
Les aspects contextualisés et décontextualisés sont liés.
Les connaissances de niveau (n+p) semblent être mobilisées efficacement.

*Enseignante E3*

L'enseignante réduit l'action des élèves de façon différente de ce que nous avons constaté pour E1. Tout se passe comme si pour E3, il y avait une stratégie d'évitement de certains aspects des connaissances : comment passer du général (décontextualisé) au particulier (contextualisé) et inversement ?
Les élèves ont à effectuer un saut important pour comprendre ces passages.
Les connaissances de niveau (n+p) semblent être mobilisées mais ne présentent pas toujours une grande efficacité pour l'enseignante.

Conclusion prenant en compte les comparaisons des répartitions des discours

Nous pouvons compléter la conclusion de la comparaison des tableaux de répartition des discours. Nous évoquions un contenu mathématique minimum à aborder.
Il apparaît que le contenu mathématique minimum à aborder est constitué des connaissances très ponctuelles que les élèves ont à acquérir. La façon de les leur faire construire diffère entre les trois enseignantes. Un point de divergence essentiel repose sur la mise en œuvre des connaissances propres des enseignantes, connaissances de niveau (n+p) pour soutenir les constructions de niveau (n).
Nous avons envisagé que les enseignantes préparaient leurs séances, ces préparations étant diverses : nous les supposions très détaillées pour E1 et E2, moins détaillées pour E3. Nous émettions une possible différence de préparation autour de la mobilisation des connaissances propres des enseignantes au cours de ces préparations. Il semble que la prise en compte de ces connaissances au moment des préparations se reflète en classe.
Ce constat nous inspire le développement suivant : une préparation où les connaissances de niveau (n+p) sont sollicitées et où un certain nombre de détails des situations à faire construire aux élèves sont prévus favoriserait l'accès aux connaissances de ce niveau en classe. Une préparation où les connaissances de niveau (n+p) sont peu sollicitées, soit parce que les détails des situations envisagées ne sont prévus qu'en terme de niveau (n) des élèves, soit parce que les

situations ne sont envisagées que dans leurs grandes lignes, limiterait l'accès aux connaissances de ce niveau en classe.

Nous devons toutefois relativiser ces propos car une composante essentielle joue certainement un grand rôle : les enseignantes observées ne possédaient pas beaucoup d'expérience au moment des observations. Nous pouvons croire que d'autres caractéristiques apparaîtraient chez des enseignants plus expérimentés.

# CHAPITRE III

# LES MANUELS

## CHAPITRE III : Les manuels

Ce chapitre constitue le deuxième axe de notre étude, nous tentons une estimation : dans quelle mesure la présence des manuels et leur utilisation par les enseignants favorisent ou au contraire défavorisent-elles l'intervention des connaissances propres des enseignants, connaissances autres que celles directement exposées.

Trois parties exposent successivement une comparaison des discours de chacune des enseignantes au texte du manuel utilisé par leur classe.

Une quatrième partie est réservée à une mise en relation de ces comparaisons ce qui nous permettra de conclure.

Plan :

A- Comparaison du discours l'enseignante E1 au texte du manuel

B- Comparaison du discours l'enseignante E2 au texte du manuel

C- Comparaison du discours l'enseignante E3 au texte du manuel

D- Mise en relation des résultats de comparaison des discours et des manuels et conclusion

## *A- Comparaison du discours de l'enseignante E1 au texte du manuel*

Nous comparons le discours de la première enseignante au texte du chapitre 10 du manuel « math 3° Edition Nathan 1993 » utilisé par les élèves. Nous procédons en quatre paragraphes de longueurs inégales, le premier présente un plan du cours de l'enseignante reconstitué à l'audition de l'ensemble de la séance et une courte description du manuel. Les second et troisième paragraphes sont réservés aux comparaisons du discours au texte du manuel, comparaison globale pour le second paragraphe et comparaisons locales pour le troisième. Le dernier paragraphe est réservé à la conclusion.

### 1- Présentation de la séance et du manuel

#### *1.1- Présentation de la séance*

Nous indiquons ci-dessous le plan du cours dressé à la lecture de la transcription de la séance observée et enregistrée. Il ne décrit donc que ce qui est fait en classe et ne rend pas compte des procédures d'élaboration du cours, avant la classe. Il nous permettra de suivre plus facilement le déroulement du travail de la classe, le contenu du discours et la comparaison au manuel que nous allons établir. Nous attribuons un titre à chacune des parties déterminées ainsi que des sous-titres puis nous indiquons en les détaillant les tâches effectuées par la classe. Les titres, sous-titres et tâches ainsi rapportés ne sont pas dans leur ensemble totalement exprimés et explicités par l'enseignante, c'est pourquoi, lorsque nous le pouvons, nous indiquons entre crochets les interventions dont nous les avons extraits. Celles-ci pourront correspondre à des demandes de l'enseignante ou à des indications qu'elle fournit sur ce qui a été vu ou ce qui va l'être. Lorsqu'aucune indication n'est mentionnée entre crochets, cela signifiera que nous avons déduit l'intitulé du contenu étudié.
Les titres et sous-titres sont numérotés en chiffres "Romains" et en lettres capitales, les tâches et sous- tâches sont repérées par des chiffres "Arabes" et des lettres minuscules.

Plan du cours

I- Calcul de la hauteur dans un triangle équilatéral.

I.A- Partie 'théorique'

1a- calcul de HB [ça vaut combien HB ?]

b- écriture de HB [je vais l'écrire comment ?]

2a- calcul de AH [on n'a plus qu'à calculer AH]

b- écriture de $AH^2$ (en fonction de a) [on va d'abord remplacer]

c- déduction de AH [alors maintenant si je veux AH]

I.B- Application, réinvestissement : calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral connaissant la mesure d'un côté, deux exemples.

II- Application des racines carrées à la résolution d'équations [maintenant on va voir les applications à la résolution d'équations du premier et du second degré]

II.A- Le premier degré [alors les équations du premier degré]

1- premier exemple : recherche de la mesure du côté d'un triangle équilatéral connaissant la mesure de la hauteur

a- mise en équation du problème [on va essayer d'écrire une équation]

b- résolution de l'équation [comment on fait pour résoudre ce genre d'équation ?]

c- vérification de l'équation trouvée en a [vérification]

2- deuxième exemple : autre cas, une autre équation à résoudre [c'est directement une équation ça sera pas dans un contexte particulier]

### *1.2- Présentation du manuel*

Nous comparons le cours au chapitre 10 « Racines carrées » comportant cinq parties dont les intitulés sont « pour prendre un bon départ », « activités », « ce qu'il faut savoir », « ce qu'il faut savoir faire » et « exercices ». La première partie est constituée de résultats de la classe de Quatrième, la partie « activités » présente sept titres numérotés de 1 à 7, nous y trouvons des résultats encadrés que les élèves sont invités à retenir puisque la mention

« retenons » est précisée. La troisième partie reprend les résultats encadrés à retenir de la seconde partie ainsi que d'autres de cette même partie mais qui n'étaient pas repérés « à retenir ». Enfin, « ce qu'il faut savoir faire » présente les calculs auxquels les élèves auront à se livrer concernant la racine carrée en classe de Troisième.

## 2- Comparaison globale du discours et du texte sous forme de tableau

Le contenu du cours enregistré correspond partiellement au titre 6 « calculer des longueurs en géométrie » et au titre 7 « résolution de l'équation $x^2 = a$ » de la seconde partie « activités » du chapitre 10.
Notre tableau de comparaison expose donc ces extraits dans la colonne réservée au manuel.

*Explications préalables à la lecture du tableau*

Nous avons divisé le tableau en deux colonnes, l'une est réservée à la description du contenu du manuel, l'autre à la description du discours. Chaque colonne indique deux parties (première et deuxième partie) correspondant aux deux parties qui constituent le cours de l'enseignante. Nous pouvons nous trouver face à deux situations : les contenus du manuel et ceux du cours de l'enseignante correspondent ou ne correspondent pas. Dans le premier cas, nous indiquons le contenu du manuel correspondant à la partie du cours annoncée et/ou traitée par l'enseignante. Quand la partie du cours de l'enseignante et celle du contenu du manuel sont semblables, nous détaillons le contenu du manuel, quand ce n'est pas le cas, nous n'indiquons que les titres du manuel. Le détail du contenu du manuel est reproduit de la façon suivante : nous conservons et reproduisons les phrases du manuel qui ne comportent qu'une consigne. Nous remplaçons les phrases qui en comportent plusieurs par autant de phrases que de consignes en gardant évidemment le même type de consigne. Ces phrases que nous formulons sont écrites en italique.
Exemples :
*Première partie*

Pour le manuel, au lieu d'écrire la phrase « exprimer BH, puis $BH^2$, puis $AH^2$ en fonction de a » (texte du manuel), nous avons écrit : *exprimer BH en fonction de a, exprimer $BH^2$ en fonction de a...*

*Deuxième partie*

Pour le manuel, nous n'avons indiqué que les titres de l'activité " résolution de l'équation $x^2 = a$ " car l'enseignante ne développe pas cette partie.

Si les contenus ne portent pas sur les mêmes éléments, les vis-à-vis n'indiqueront rien.

Exemple :

L'enseignante soumet aux élèves des exemples d'applications différents du seul exemple que le manuel propose mais nécessitant l'application de la même relation. Nous avons donc indiqué les applications sans aucun vis-à-vis pour l'une et l'autre.

*Tableau*

| MANUEL | ENSEIGNANTE |
|---|---|
| *première partie* | *première partie* |
| voici un triangle équilatéral ABC.<br>Dans une unité de longueur choisie, la longueur de son côté est $a$ et celle de la hauteur [AH] est $h$.<br>*exprimer BH en fonction de a*<br><br>*exprimer $BH^2$ en fonction de a*<br>*exprimer $AH^2$ en fonction de a*<br>**En déduire** que h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | triangle équilatéral ABC<br>a longueur du côté<br><br>calcul de HB et expression de HB en fonction de a<br><br><br>écriture de $AH^2$ en fonction de a<br>déduction AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ |
| Application<br>ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm. O est le centre du cercle C circonscrit à ce triangle. | Applications<br><br>donner la hauteur d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 5cm<br>donner la hauteur d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 6cm. |
| *deuxième partie* | *deuxième partie* |
| Résolution de l'équation $x^2 = a$<br>1. résolution de l'équation $x^2 = 25$<br>2. résolution de l'équation $x^2 = 7$<br>3. résolution de l'équation $x^2 = a$ avec a un nombre positif<br>4. cas où a est strictement négatif. | Application à la résolution d'équation du premier degré.<br>1a. mise en équation<br>1b. vérification<br>2. résolution d'une équation. |

Premières impressions

Cette première comparaison nous permet de constater que dans l'ensemble, la structure du cours de l'enseignante est la même que celle du manuel. L'objectif des deux premières parties est de favoriser la manipulation de la racine carrée en géométrie, celui des deux secondes est de résoudre des équations.

Pour les premières parties, l'activité proposée par le manuel est la même que celle en cours de résolution dans la classe : calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral. La succession des étapes est la même dans les deux colonnes du tableau, seul le calcul de $BH^2$ diffère légèrement, il est explicitement demandé par le manuel tandis que l'enseignante ne le demande pas aux élèves, elle leur propose uniquement le calcul de HB. Les applications de la fin de la première partie laissent apparaître une différence. Le manuel présente une application dont l'énoncé est différent de chacune des deux applications proposées par l'enseignante. Pour les deuxièmes parties, les contenus ne sont pas exactement les mêmes. L'enseignante subdivise cette deuxième partie en deux sous-parties dont seule la première sera développée sur le moment, elle est annoncée par le titre « application à la résolution d'équation du premier degré ». Dans la partie du manuel que nous identifions au cours, nous ne trouvons rien de semblable, la deuxième partie du manuel porte directement sur le second degré. L'enseignante introduit donc un titre spécifique à la racine carrée et aux équations du premier degré. Le premier sous-titre constitue ainsi un élément de différence. Enfin, la deuxième sous-partie que l'enseignante annonce mais qui ne sera pas développée par manque de temps porte sur un contenu semblable à celui du manuel : « résolution d'équations du second degré ». Ce contenu est introduit dans le cours sous un titre légèrement différent de celui du manuel.

Conclusion

Il semble dans un premier temps que l'enseignante s'inspire du manuel pour organiser ses cours mais qu'elle essaie de les particulariser en introduisant ou en supprimant d'autres points.

## 3- Comparaisons locales du cours et du texte du chapitre 10 du manuel

### *3.1- Première partie du cours : titre I du plan, premières lignes du tableau de comparaison*

Les premières interventions de l'enseignante constituent un rapide résumé de la fin du cours précédant celui dont nous disposons, elles permettent de rappeler les éléments qui avaient déjà été avancés pour résoudre le problème posé ; le problème consistait en l'expression de la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur d'un de ses côtés. Ces premiers rappels nous procurent les indications suivantes :

- le triangle équilatéral sur lequel la classe travaille s'appelle (ABC),
- la mesure d'un côté est notée a,
- la hauteur considérée est celle issue de A,
- la hauteur a pour pied H.

Le même problème est posé par le manuel, en voici l'énoncé

> Voici un triangle ABC.
> Dans une unité de longueur choisie, la longueur de son côté est $a$ et celle de la hauteur [AH] est $h$.
> **a. Exprimer** BH, puis $BH^2$, puis $AH^2$ en fonction de $a$.
> **b. En déduire** que $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nous remarquons donc les mêmes notations.

Un élément essentiel dit au cours précédent est rappelé par l'enseignante : l'outil qui sera utilisé pour le calcul de la longueur de la hauteur est le théorème de Pythagore. Suite à cette remise en place des éléments constitutifs du problème en cours d'étude, l'enseignante profite du propos d'un élève qui annonce « c'est un demi de CB » pour demander la mesure de HB : « Voilà alors ça vaut combien HB ? ». Ainsi, l'activité est reprise et va être complétée. Nous débutons nos comparaisons locales à ce moment.

Nous aborderons successivement le calcul de HB, le calcul de AH puis les applications que l'enseignante propose aux élèves.

### 3.1.1- Comparaison au manuel pour le calcul de HB

Présentation

Nous procédons en deux temps. Le premier est une analyse succincte du discours qui nous aidera à extraire les principaux éléments que nous comparerons au texte du manuel. Le deuxième présentera la comparaison au manuel.

#### *3.1.1.1- Analyse du discours*

##### i- Les différentes étapes : *quelques commentaires et rappels*

Entre l'enseignante et les élèves, 24 interventions de longueur différente conduisent à la conclusion HB = a/2, qui se fait en deux étapes d'importance inégale. La première étape est une demande de précision sur la façon dont il faudra écrire la valeur de HB (la réponse attendue est a/2) et la deuxième est une justification du fait que H est le milieu du segment [CB]. Les deux étapes s'articulent autour d'un « pourquoi ? », nous les reproduisons ci-dessous en soulignant le « pourquoi » puis nous les commentons.

| *première étape* : calcul de HB | *deuxième étape* : écriture de HB |
|---|---|
| P- Voilà alors ça vaut combien HB ?<br>E- Ben la moitié de a / a divisé par deux<br>P- Alors je vais l'écrire comment ?<br>E- a sur deux / a demi / a sur deux<br>P- Voilà a sur deux <u>pourquoi</u> ? » | E- parce que... la moitié parce que la hauteur coupe en demi<br>P- oui pourquoi ?<br>E- ...équilatéral...<br>P- Voilà dans un triangle équilatéral, la hauteur est aussi<br>E- médiane<br>P- voilà médiane et... ?<br>E- médiatrice<br>P- et médiatrice voilà donc effectivement ici H va être le milieu de CB donc ici la haute... la distance HB c'est bien a sur deux. on va écrire donc première chose, on va dire que H est le milieu de BC. Alors dans un triangle équilatéral... la hauteur issue d'un sommet... est aussi<br>E- médiatrice<br>P- voilà, la hauteur issue d'un sommet est aussi la médiatrice du côté opposé. Oui ?<br>E- donc CH égal HB<br>P- pardon ?<br>E- CH égal HB<br>P- CH ? oui CH c'est HB, c'est ça. Puisque la hauteur est aussi médiatrice, ça veut dire qu'elle coupe<br>E- le segment<br>P- oui le segment [BC]<br>E- en son milieu<br>P- en son milieu voilà. Donc la hauteur issue de A coupe |

le segment [BC] en son milieu H. Donc on a CH égal HB, CH égal HB égal ?
E- a demi / a sur deux
P- a sur deux... ou on dit un demi de a mais on ne dit pas a demi. Donc on a trouvé la longueur HB, on connaît la longueur AB donc maintenant on a plus qu'à calculer AH...

La première étape commence par une question sur la valeur de HB « alors ça vaut combien HB » ainsi, dès le début, l'enseignante attend une réponse sur le calcul de HB. L'intervention « voilà a sur 2 » précédant le « pourquoi » de la fin de l'étape est un acquiescement montrant que l'enseignante accepte la réponse « a sur 2 ». La question, « alors je vais l'écrire comment ? », qui est à l'origine de cette réponse, peut avoir deux significations. Il peut s'agir d'une demande de rédaction d'un raisonnement ou d'une demande portant sur l'écriture de « la moitié de a », « a divisé par deux ». Nous proposons donc deux interprétations de cette question de l'enseignante.

- La première : quelle(s) justification(s) peut-on apporter et rédiger pour prouver que HB = a/2 ?

- La deuxième : écrire HB sous la forme d'une fraction « a sur deux » et non du résultat d'une opération « a divisé par deux ».

Notons par ailleurs l'apparition de la lettre « a » qui nous fait penser à un début de décontextualisation.

*Expliquons nos interprétations*

Pour la première interprétation, les données du problème sont : ABC triangle équilatéral, H pied de la hauteur issue de A et AB = a. Il faut établir que H est le milieu du segment [CB] donc (CH = HB), noter que (CB = CH + HB) soit (CB = 2HB), faire remarquer que (CB = AB) par conséquent (CB = a) et enfin conclure (a = 2HB) soit (HB = a/2).
Cette démonstration qui n'a pas encore été effectuée est sous-jacente à la réponse. Puisque les élèves ont directement donné la valeur de HB sans explications, nous pouvons supposer que l'enseignante les questionne sur le raisonnement qu'ils ont suivi pour fournir cette réponse. Cette demande d'explication permet aussi de montrer le début de décontextualisation effectuée avec l'intervention de la lettre « a ». Ainsi le résultat ne semblera plus spécifique au

triangle équilatéral ABC que la classe manipule et voit au tableau mais un résultat général à tout triangle équilatéral : c'est une sorte de décontextualisation.

Deux éléments nous ont conduit à la deuxième interprétation. Les élèves ont déjà donné une réponse : « la moitié de a », « a divisé par deux » mais ces interventions ne semblent pas suffisantes à l'enseignante qui demande une ou des précisions : « alors je vais l'écrire comment ? », elle attend autre chose. Les élèves reprennent la même réponse en la formulant différemment : « a sur deux ». Cette fois l'enseignante accepte: « voilà a sur deux » et enchaîne avec « pourquoi ? ». La seule chose ayant changé dans ce qu'ils disent est la forme de leur réponse. La première réponse faisait référence à l'opération qui permet de donner le résultat : « la moitié » « divisé », les élèves explicitaient l'opération à effectuer sur la distance CB ou la valeur « a » pour obtenir HB. La seconde réponse fait apparaître un vocabulaire plutôt apparenté aux fractions avec le mot « sur » qui permet de changer de cadre. Du cadre arithmétique avec une opération sur les nombres, on passe au cadre algébrique avec les fractions. De la sorte, HB ne s'obtient pas à l'aide d'un procédé arithmétique mais à l'aide d'un procédé algébrique qui permet de rejoindre la démonstration du résultat, donnant l'impression qu'elle a été effectuée.

Nous pouvons aussi voir dans ce changement de vocabulaire une "généralisation" du résultat obtenu qui rejoint une certaine "décontextualisation" : l'enseignante entraîne les élèves à abandonner leur "vocabulaire arithmétique" au profit d'un "vocabulaire algébrique".

Pour expliquer la question « alors je vais l'écrire comment », nous choisissons la deuxième interprétation. En effet, dans la première étape, l'enseignante ne demande pas de préciser la raison pour laquelle H est milieu de [CB], elle le fait établir au cours de la deuxième étape. Or cette indication est essentielle à la conclusion « HB = a/2 », il ne s'agit donc pas de cela dans la première étape, par conséquent nous excluons la première interprétation. Finalement, la première étape conduit à exprimer le résultat attendu sous forme de fraction et puisque l'enseignante ne demande rien en fonction de CB ou AB, nous concluons qu'elle attendait la réponse directement en fonction de « a ».

Nous retenons de l'interprétation des deux questions « alors ça vaut combien » et « alors je vais l'écrire comment ? » de la première étape que l'enseignante donne de l'importance à l'écriture fractionnaire en fonction de « a ». Nous concluons aussi que le « pourquoi ? » transitoire aux deux étapes veut dire "pourquoi peut-on dire que HB vaut la moitié de CB ou a/2, quelle qualité de H permet d'affirmer ceci ?". Il introduit la deuxième étape. Remarquons que cette question, non explicitée par l'enseignante, est cependant correctement interprétée par les élèves qui répondent sans questionnement supplémentaire.

Les deux étapes sont déséquilibrées en nombre d'interventions, la première en comporte 5 dont 3 de l'enseignante qui ne sont que des questions et la deuxième 20 dont 10 de l'enseignante. Nous constatons un autre déséquilibre sur le fond : entre l'écriture en fonction de « a » pour la première étape et la justification de « H milieu de [CB] » pour la deuxième. Expliquons-nous en rappelant ce que nous avons exposé dans l'étude des passages décontextualisés (cf. passage 2). L'enseignante sollicitait les élèves pour qu'ils expliquent pourquoi H est le milieu du segment [CB]. Pour cela, elle insistait afin qu'ils exposent les propriétés qu'ils connaissent à propos des droites particulières dans le triangle équilatéral (hauteur, médiane et médiatrice sont confondues) et privilégiait la médiatrice à la médiane. Nous avions alors conclu qu'elle attendait le mot médiatrice et avait voulu le faire dire aux élèves en excluant la médiane, comme si la médiatrice permettait de ne pas oublier qu'il s'agit en fait de la hauteur, ces deux dernières étant perpendiculaires au segment [CB] quelle que soit la nature du triangle ABC.

Ainsi, en considérant ces deux étapes, nous remarquons une différence de nature autour des sollicitations de l'enseignante aux élèves. La nature de la première étape est une question de notation ou d'identification de l'expression de HB à un certain registre, elle n'est pas une demande à propos d'une propriété spécifique à la situation mathématique. La non-explicitation du raisonnement qui conduit à obtenir HB = a/2 conduit à une situation où il semble que la seule différence entre arithmétique et algèbre repose sur le vocabulaire. L'enseignante accorde une attention aux deux termes « divisé » et « sur » qui indiquent deux situations différentes sans donner aux élèves la possibilité de construire mathématiquement cette différence. La deuxième étape au contraire est une propriété spécifiquement mathématique, qui nécessite une justification par théorème ou propriété. Pour cette autre étape l'utilisation d'un quelconque des deux termes « médiane » et « médiatrice » conduit à la conclusion recherchée. D'un point de vue mathématique dans cette situation les deux termes sont analogues. En privilégiant l'un des deux termes l'enseignante ne donne pas la possibilité aux élèves de construire ce raisonnement mathématique.

Une attention particulière est donnée au vocabulaire qui peut sous-entendre un raisonnement, cette même attention n'est pas donnée aux propos corrects des élèves. Ce déséquilibre des deux étapes nous montre que (au contact des élèves) les connaissances mises en jeu par l'enseignante sont plutôt de niveau (n) que de niveau (n+p).

### ii- Une remarque à propos de l'écriture HB = a/2

Le passage de l'écriture de HB en fonction de CB à celle en fonction de « a » n'est à aucun moment effleuré ni explicitement ni implicitement puisque la réponse « a sur deux » est directement retenue. Outre un début de décontextualisation, ce passage pourrait être une référence implicite à la transitivité de la relation d'équivalence qu'est l'égalité et une occasion de souligner l'égalité de longueur des côtés d'un triangle équilatéral, deux éléments à portée des élèves.

La déduction « H milieu de [CB] alors HB = a/2 » qui se fait en une phrase semble rapide en comparaison de l'argumentation conduisant à « H milieu de [CB] ».

Observons l'extrait qui suit la justification selon laquelle H est le milieu du segment [CB] :

> « E- Donc CH égal HB.
> « P- Pardon ?
> « E- CH égal HB.
> « P- CH ? Oui CH c'est HB c'est ça... »

La remarque d'un élève pour dire « CH égal HB » est une conclusion possible de ce résultat. L'enseignante ne semblait pas l'attendre, elle demande « Pardon ? » puis « CH ? » et enfin « CH égal HB c'est ça ».

Puis on a de nouveau à la fin de la deuxième étape :

> « P- CH égal HB égal... a sur deux... »

qui permet à l'enseignante de conclure et d'entamer un autre calcul. Nous retrouvons la précision (CH = HB) et le passage direct à (a/2), on ne voit toujours pas comment on passe des lettres C, H et B à la lettre a et à la valeur (a/2). L'explicitation de ce passage ne semble pas attendue par l'enseignante, elle ne la provoque pas non plus même si l'occasion s'y prête. Cela nous confirme le déséquilibre sur le fond des deux étapes, déséquilibre qui se trouve donc aussi dans l'absence totale de sollicitation pour la notation avec « a », dans la sollicitation très marquée (puisqu'une réponse juste avec médiane ne suffit pas) pour justifier que H est le milieu des points C et B et dans l'absence d'explication du passage de « H milieu de [CB] » à « HB = a/2 ».

### iii- Interprétation

*Nous déduisons de cette analyse les principaux éléments suivants :*

1- L'enseignante demande aux élèves de justifier d'un point de vue géométrique « pourquoi » H est le milieu de [CB].

2- En passant aux longueurs ou aux mesures, l'enseignante demande aux élèves d'exprimer HB à l'aide d'un vocabulaire emprunté au cadre algébrique.

3- L'enseignante ne demande pas aux élèves d'expliciter comment ils obtiennent HB = a/2 à partir du fait que H est le milieu du segment [CB] : il n'y a pas de liens entre les deux cadres 1 et 2.

Indiquer que H est le milieu du segment [CB] pourrait permettre de conclure à une relation entre les longueurs HB et CB par suite, entre HB et « a ». Mais la relation est directement explicitée entre HB et « a » et est donnée sous forme d'un résultat définitif : tout se passe comme si l'écriture algébrique de HB permettait de "montrer" qu'un raisonnement basé sur des propriétés algébriques avait été tenu (si nous admettons qu'une écriture algébrique ne peut provenir que d'un tel raisonnement).

Finalement, préciser que H est le milieu des points C et B entraîne l'enseignante à donner une valeur de HB (sans expliciter le passage).

Tout se passe comme si l'enseignante indiquait les principaux éléments du raisonnement (le début et la conclusion) en "oubliant" de les lier entre eux, leur mention suffisant à la production du résultat. Nous avons donc l'impression que l'enseignante agit comme si ces liens étaient évidents à un élève et qu'un vocabulaire particulier suffisait à les faire émerger.

4- L'enseignante exprime HB directement en fonction de « a ».

L'utilisation de la lettre « a » conduit à une décontextualisation. Nous avons donc l'impression que les décontextualisations ou généralisations sont provoquées par des changements de vocabulaire ou de dénomination, elles peuvent ressembler à des habitudes acquises de l'enseignante : elles ne sont pas "montrées".

5- Lorsque les élèves font des remarques non attendues de l'enseignante, deux situations se produisent.

- L'enseignante les incite à dire ce qu'elle semblait attendre autour du point qu'ils abordent (médiane/médiatrice) même si les remarques sont correctes et leurs contenus suffisants à la suite du travail engagé.

- L'enseignante exploite peu des remarques qui pourraient conduire à d'autres développements.

Nous avons l'impression que l'enseignante s'en tient à un texte de préparation et qu'elle n'adapte que partiellement son discours aux élèves.

#### *3.1.1.2- Comparaison au manuel*

Nous dégageons de l'analyse précédente les deux buts suivants de l'enseignante :

1- Justifier certaines parties du raisonnement par des propriétés mathématiques suivant un texte de préparation déjà établi.

2- Atteindre l'écriture a/2 le plus "rapidement" possible.

Par rapport au manuel, le deuxième but (l'écriture a/2) est explicitement demandé par le manuel : « Exprimer HB en fonction de a ». Le premier but que nous attribuons à l'enseignante n'est pas l'objet d'une question spécifique du manuel, il est implicite à la question « exprimer HB en fonction de a ». En effet, pour y répondre il faut expliquer comment le rapport a/2 a été obtenu. Cette explication est une des parties les plus accessibles du contrat qui régit le cours de mathématiques.

Pour tout ce qui n'est pas directement demandé par le manuel, nous constatons :

- une certaine disponibilité de l'enseignante dès l'instant où l'objet en cours était prévu même inconsciemment ou par habitude : la référence aux fractions, l'identification de la hauteur comme médiatrice. Cette disponibilité donne l'impression que l'enseignante insiste sur des "détails" qui parfois peuvent paraître superflus,

- des situations créées par l'activité en cours non totalement exploitées par l'enseignante comme si son adaptation aux élèves était difficile,

- des vides autour de certains points comme le passage sur l'écriture de HB en fonction de a ; ce qui peut ressembler à une évidence, demandée par le manuel, est peu approfondi par l'enseignante.

#### *3.1.1.3- Conclusion*

Nous avons finalement l'impression que l'enseignante s'attache à compléter le manuel sur ce qui nécessite apparemment des justifications. Cependant, certains points moins évidents sont passés rapidement comme s'il ne s'agissait que "d'habitudes" ou bien comme si l'utilisation d'un certain vocabulaire – qui est aussi celui du manuel – et l'indication de certains éléments indispensables à un raisonnement étaient suffisants à la constitution de ce raisonnement. C'est-à-dire comme si ceux auxquels s'adresse le raisonnement pouvaient le reconstituer au seul énoncé du vocabulaire et de ces indications. En cela, nous disons que les connaissances mises en jeu sont plutôt de niveau (n) que de niveau (n+p) : il semble que l'enseignante résout "pour elle" le problème. Cette remarque concerne ce qui n'est pas mis en évidence par le manuel. Nous relevons donc une coïncidence entre un certain suivi du manuel et un écartement des connaissances (n+p).

### 3.1.2- Comparaison au manuel pour le calcul de AH

Présentation

Nous allons procéder en deux temps. Le premier précisera les éléments essentiels qui se dégagent d'une analyse globale des propos de l'enseignante portant sur le calcul de AH. Nous établirons alors un rapprochement avec le texte du manuel correspondant à ce calcul. Le second temps sera plus détaillé et portera sur le calcul avec les racines. Il nous donnera l'occasion de mesurer la réussite de l'objectif rappelé par l'enseignante en fin d'activité : « [application des racines] à la géométrie ». Par ailleurs, il nous permettra de comparer ce calcul avec les racines à une autre partie de l'exposé du manuel du même chapitre, mais dont le contenu a été vu en classe avant cette partie portant sur « l'utilisation des racines en géométrie ».

### *3.1.2.1- Analyse globale*

Une partie de la conclusion précédente est ici aussi vérifiée, il s'agit des justifications mathématiques des calculs effectués, de la volonté d'atteindre rapidement une écriture des résultats en fonction de « a » et de préciser certains détails des écritures. Illustrons et détaillons chacun de ces points.

#### i- Les justifications mathématiques

Ce thème concerne le passage où il s'agit de justifier l'écriture de la propriété ($AB^2 = AH^2 + HB^2$) par le théorème de Pythagore commenté puis appliqué. La condition à satisfaire pour son application est indiquée par les élèves et acceptée de l'enseignante qui les sollicitait.

> « P- on a plus qu'à calculer AH. Alors on va utiliser, Hubert tu termines, avec quoi on va pouvoir calculer AH ?
> « E- AB moins HB
> « P- alors on utilise ?
> « E- avec Pythagore
> « P- Oui ou (Oui où),
> « E- La réciproque
> « E- ouais la réciproque
> « E- Thalès
> « E- ou les racines carrées…
> « Non, dis pas n'importe quoi (…) alors on utilise le théorème de Pythagore ou sa réciproque ?
> « E - le théorème de Pythagore
> « P- oui le théorème de Pythagore, le théorème de Pythagore va servir à calculer une longueur alors que la réciproque elle sert à montrer que le triangle est rectangle. Alors là on a deux longueurs, on peut calculer la troisième donc c'est Pythagore. Mais pourquoi est ce qu'on peut utiliser le théorème de Pythagore ?
> « E- y a un angle
> « E- parce qu'il est rectangle
> « P- parce qu'il y a le triangle rectangle
> « E- ah
> « P- alors ?
> « E- alors on fait AB au carré moins HB au carré et on obtient HA
> « P- d'accord »

La suite du passage consiste en une rédaction au tableau destinée aux cahiers des élèves.

> « P- alors on va l'écrire. Alors donc dans le triangle rectangle AHB, d'après le théorème de Pythagore, on a quoi ? la somme des carrés des côtés égal le carré de l'hypoténuse. Dans le triangle AHB, d'après le théorème de Pythagore on a que AH carré plus HB carré égal AB carré. »

Nous le notions en commentaire du passage décontextualisé 5, dans les échanges entre l'enseignante et les élèves puis dans la dictée de la rédaction destinée aux cahiers des élèves rapportés dans ces deux extraits, rien ne justifie que le triangle (AHB) est rectangle en (H). Les élèves ont reconnu un triangle rectangle et, au moment de la rédaction l'enseignante distingue « les côtés » de « l'hypoténuse » du triangle. Ces deux facteurs semblent suffisants pour accepter la nature rectangle du triangle, pour préciser implicitement le sommet de l'angle droit puis pour contextualiser le théorème. Le rappel de la définition de la hauteur ou de la médiatrice qui permettrait ces justifications est omis. L'enseignante ne relève pas les insuffisances des propos des élèves et adopte leur attitude.

### ii- Ecriture en fonction de « a »

Ce thème concerne le passage qui suit immédiatement la rédaction au tableau ci-dessus.

> « P- dans le triangle rectangle AHB d'après le théorème de Pythagore on a que $AH^2 + HB^2 = AB^2$
> « donc ensuite on remplace, $AH^2$ puisqu'on le cherche ça bouge pas, $HB^2$ ça va nous donner combien ?
> « E- on passe de l'autre côté, ça donne moins
> « P- euh oui d'accord on va d'abord remplacer après
> « E- a sur deux
> « (...)
> « P- donc $AB^2$, $a^2$ plus...
> « E- madame pourquoi $a^2$ à la fin ? »
> « (...)
> « P- donc $AH^2$, $AH^2$ Lucie ça vaut quoi ?

Aussitôt la relation ($AH^2 + HB^2 = AB^2$) écrite, l'enseignante annonce l'étape suivante qui est de "remplacer ce qui est connu". La première chose qu'elle demande est ($HB^2$) dont une expression en fonction de a vient tout juste d'être donnée. Mais un élève propose autre chose : exprimer ($AH^2$) en fonction de ($HB^2$) et ($AB^2$), c'est d'ailleurs la troisième fois qu'il le propose, l'enseignante ne le suit pas et donne la consigne de remplacer (AB) et (HB) par leur valeur en fonction de (a) dans la relation ($AB^2 = AH^2 + HB^2$). Cette consigne mène alors à une expression de ($AH^2$) en fonction de (a). D'autres calculs auraient pu être effectués : exprimer $AH^2$ en fonction de $AB^2$ et $HB^2$, puis remplacer ces valeurs en fonction de « a » ou avec le même début, exprimer $AB^2$ en fonction de $HB^2$, calculer puis remplacer HB ou encore, toujours avec le même début, exprimer $HB^2$ en fonction de $AB^2$ puis introduire « a »... L'attitude de l'enseignante revient à produire une écriture de $AH^2$ en fonction de a le plus rapidement possible, aucun autre calcul n'étant entamé sur l'égalité $AB^2 = AH^2 + HB^2$. La première question de l'énoncé de l'activité du manuel est d'exprimer les longueurs BH, puis $BH^2$, puis $AH^2$ en fonction de a. Une lecture rapide du manuel peut laisser croire qu'une relation entre $AH^2$ et a est privilégiée à toute autre procédure de calcul conduisant au même résultat. Nous constatons donc entre ce que l'enseignante fait produire aux élèves et les demandes du manuel une démarche similaire : remplacer ce qui est connu en fonction de a puis effectuer les autres calculs, ce qui revient à exprimer toutes les longueurs en fonction de a soit $AH^2$ en fonction de a. Tout se passe comme si l'enseignante reproduisait directement le texte du manuel en répondant aux questions.

### iii- Détails des écritures

Les détails portent sur l'extrait qui est une partie du passage précédent :

« P- on va d'abord remplacer
« E- a sur deux
« P- oui alors comment tu l'écris ?
« E- ah ben non
« P- a sur 2 le tout au carré ça fait ?
« E- a au carré sur quatre ($a^2/4$)
« E- ben on
« P- oui ça fait $a^2$ sur 4 alors on va l'écrire après égal donc $AB^2$ plus $a^2$ donc sur 4 égal $a^2$...
« E- madame pourquoi $a^2$ à la fin ?
« P- AB c'est au carré AB vaut a donc AB au carré c'est $a^2$ donc $AH^2$, $AH^2$ Lucie ça vaut quoi ?

*- Le premier détail*

Nous retrouvons une question sur l'écriture : « alors comment tu l'écris ? a sur 2 le tout au carré ça fait ? ». Ici l'enseignante vérifie que les élèves connaissent le calcul de $(a/2)^2$, elle est passée au cadre algébrique avec les opérations sur les fractions. Notons l'attention que l'enseignante apporte à préciser que le carré porte sur la fraction a/2 et non sur a ou sur 2 : « a sur deux le tout au carré ».

*- Le deuxième détail*

L'expression de $HB^2$ en fonction de « a » est exposée : nous avons remarqué la place que lui a réservée l'enseignante. L'expression de $AB^2$ en fonction de « a » est, elle-aussi, exposée mais plus rapidement et c'est un élève qui conduit l'enseignante à en parler.

« E- Madame, pourquoi à la fin $a^2$ ?

« P- AB c'est au carré, AB vaut a et donc AB au carré c'est a au carré. »

Si l'élève n'avait pas demandé d'explication, l'enseignante n'en aurait pas parlé. Nous avançons comme explication qu'elle estime que ce passage est évident.

iv- Conclusion

1- un souci de l'enseignante est de justifier correctement sur un plan mathématique ce qui est fait ; c'est le passage long sur le théorème de Pythagore, cependant la justification n'est pas complète, des éléments pouvant paraître évidents sont omis (sur la contextualisation du théorème).

2- Nous remarquons une succession des étapes semblable à celle du manuel.

3- Un passage que l'enseignante considère peut-être évident, n'est abordé que sur demande d'un élève.

La forme présentée par le manuel est respectée, le fond est parfois rapidement traité, voire sommairement.

### *3.1.2.2- Comparaison des calculs du cours avec les racines et de l'exposé analogue du manuel*

i- L'objectif annoncé

Nous allons commenter l'utilisation des racines carrées pour le calcul des longueurs en géométrie que l'enseignante rappelle comme objectif de l'activité une fois celle-ci achevée.

L'égalité AH = $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$ déduite du résultat obtenu lors du calcul de AH² = $\dfrac{3a^2}{4}$ constitue un passage propice à la mise en évidence et à la mise en œuvre de cet objectif. En effet, il s'agit à ce moment de mettre en évidence le "passage à la racine" c'est-à-dire "l'utilisation de la racine carrée" en géométrie pour cet exemple. L'extrait du cours qui suit révèle que les explications de l'enseignante sont provoquées par les interventions et demandes d'un élève.

> « P- Alors maintenant si je veux AH. Parce que j'ai AH carré qui est trois a carré sur quatre, si je veux AH ?
> « E- Euh racine carrée de
> « P- Oui racine carrée de 3a carré sur 4
> « E- Pourquoi racine carrée ?
> « P- Pardon ? quand tu écris que x au carré vaut 25 d'accord, x vaut combien ?
> « E- 5
> « P- 5 tu as bien fait racine de 25 ?
> « E- Oui mais là on peut faire divisé par deux ah ben non.
> « P- Non non, là je prends la racine. »

Nous le constatons, ce passage est traité de façon très rapide par l'enseignante et il est peu argumenté. Par ailleurs l'explication ne mentionne pas que pour le calcul en cours, AH étant une distance, sa valeur est positive. Nous pouvons supposer ce point évident en classe de troisième, l'évidence est maintenue et non précisée. La réponse à la question « pourquoi racine carrée ? » nous semble reposer sur un raisonnement implicite dont la teneur serait :
« on fait comme si $x^2$ était 25 alors on écrit 25 sous la forme d'un nombre au carré. Ce nombre qui sera au carré représentera alors x. Puisque $5^2 = 25$, le nombre x cherché est donc 5 alors x = 5. D'autre part puisque $5 = \sqrt{25}$ il fallait donc bien "faire racine" pour obtenir 5 il faut donc bien "faire racine" pour obtenir x lorsque l'on a $x^2$ ».
Dans ce raisonnement, la racine carrée semble davantage justifiée par le carré parfait 25 que par la puissance 2 de $x^2$. Un élève peut éprouver de la difficulté à associer "l'application de la racine carrée" à la présence de la puissance 2 de AH².
Nous pourrions aussi supposer que l'enseignante assimile AH² = 3a²/4 à une équation du second degré du même "modèle" que $x^2 = 25$, AH jouant le rôle de l'inconnue x et 3a²/4 le rôle de 25, AH étant une quantité positive, la solution qui convient est AH = $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}$.
Nous ne retiendrons pas cette hypothèse car l'enseignante n'a pas encore exposé le cours sur la résolution des équations du second degré à une inconnue, cette partie constituant la suite du cours présent.

ii- Le passage de $AH^2 = 3a^2/4$ à $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

La déduction se fait en deux étapes. La première est celle que nous venons de commenter, la seconde porte sur la transformation de $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ en $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le volume d'explications que l'enseignante fournit ou sollicite des élèves n'est pas le même d'une étape à l'autre. De plus, les étapes sont de nature différente. La première nécessite l'application d'un outil, l'utilisation d'une notion, la seconde nécessite l'application des propriétés de l'objet « racine carrée algébrique ». Elles ne sont pas traitées de la même façon.

La première étape nous montre qu'un élève reconnaît l'objet à utiliser et qu'un autre ne comprend pas le résultat obtenu. Il semble que cette reconnaissance soit suffisante à l'enseignante et que l'incompréhension d'un des élèves ne suscite pas davantage d'explications. Nous nous serions attendu à ce que le traitement de l'étape soit plus long puisque c'est ce passage qui semblait être l'objet du cours (cf. l'objectif annoncé).

Pour la deuxième étape, le passage de $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ est plus long que le précédent : 27 interventions dont 14 de l'enseignante (9 questions que nous qualifierons de guidage et le reste de commentaire, mise en garde ou procédure de calcul) contre 9 pour le passage précédent dont 5 de l'enseignante.

La longueur du passage est provoquée par les justifications des détails des calculs à l'aide des propriétés des racines carrées. Ces propriétés occupent d'ailleurs une grande place dans le manuel puisque $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ a et b positifs, b positif non nul pour la deuxième, sont traitées en deux pages et demie sur les sept que comporte le chapitre et font l'objet de 36 exercices sur les 90 que compte le chapitre. Ceci montre l'importance que le manuel accorde aux calculs. L'enseignante semble éprouver le même souci à propos de l'importance des calculs bien que, notons-le, elle ne mentionne à aucun moment les conditions d'applications des formules.

### iii- Conclusion

Si nous rapportons la quantité de remarques, questions, mises en garde et commentaires que l'enseignante formule à propos des calculs à celle qu'elle formule à propos de l'application de l'objet « racine carrée », nous devons constater qu'il y a une grande disproportion surtout si nous rappelons que l'un des objectifs de ce cours – si ce n'est l'objectif du cours – était l'application de l'objet « racine carrée », cette application illustrant son "utilité" en géométrie. Nous devons alors conclure que l'importance que le manuel donne aux manipulations des propriétés des racines carrées est totalement adoptée par l'enseignante et que cette importance a même tendance à occulter certains passages non moins importants : les conditions d'utilisation de la racine, la reconnaissance des situations qui nécessitent son emploi. Le comment est privilégié au pourquoi, ici aussi l'enseignante semble agir comme le ferait un élève. Son discours donne l'impression que les seules connaissances qu'elle utilise en classe sont de niveau (n).

## 3.1.3- Les applications

La fin de la première partie du cours de l'enseignante est constituée de deux exemples :

> « alors par exemple, quand je prends le triangle équilatéral de côté 5 combien vaudra la hauteur, une hauteur ? »

et,

> « si j'ai un triangle équilatéral de côté 6 ? »

qui sont donc des applications directes du résultat mis en évidence auparavant.
Le calcul de la « hauteur d'un triangle équilatéral » est le deuxième des trois points de la partie « calculer des longueurs en géométrie » du manuel, le premier point était « diagonale d'un carré » et le troisième point « une application » est le suivant :

ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm. O est le centre du cercle C circonscrit à ce triangle.

Faire une figure. Donner la valeur exacte du rayon du cercle C.

La première intervention du cours nous informe que le premier point du manuel a été étudié lors du précédent cours : « on avait vu avant de partir le calcul de la diagonale d'un carré et on avait commencé à calculer la hauteur dans un triangle équilatéral ». Nous remarquons donc que les deux premiers points de la partie « calculer des longueurs en géométrie » du manuel ont été étudiés par la classe, vraisemblablement dans le même ordre. Le troisième n'est pas reproduit.

### 3.1.4- Quelques mots sur le vocabulaire utilisé par l'enseignante

* *Simplification*

Le terme est utilisé par l'enseignante pour deux types de calculs :

- pour les radicaux : $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}.a$
- pour les fractions : $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Le manuel emploie le même terme pour les radicaux. En fait, il ne s'agit pas de la même simplification. Pour les radicaux, il s'agit plutôt de l'exécution d'un calcul en utilisant la définition de la racine carrée associée à l'application d'une des propriétés. Il s'ensuit alors une écriture simplifiée.

### 3.1.5- Conclusion

→ Excepté un élément du texte de l'activité proposée par le manuel (« dans une unité de mesure choisie ») toute l'activité a été reprise, de la même façon, dans le même ordre, avec les mêmes mots et les mêmes notations. L'enseignante n'est pas vigilante sur quelques points que nous avons mis en évidence : la justification du sommet de l'angle droit du triangle rectangle AHB, le passage des écritures en fonction des lettres A, B, C et H à celles en fonction de a, le fait que toutes les grandeurs considérées sont positives ce qui permet d'appliquer "sans problème" la racine carrée.

→ Les points sur lesquels l'enseignante n'est pas vigilante correspondent à des "silences" du manuel.

→ Certains points sur lesquels le manuel insiste sont repris par l'enseignante, d'autres ne le sont pas.

*Les points repris sont les suivants :

- "simplification" au maximum des radicaux
- application (avec insistance) des propriétés multiplicatives de la fonction racine
- $\sqrt{a^2} = a \ (a>0)$

*ce qui n'est pas repris :

- le caractère positif des nombres $a$ et $b$ dans les formules $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ( $b \neq 0$)
- AH est une distance donc positive (ce qui a peut-être été précisé lors du cours précédent)
- deux solutions à l'équation $x^2 = 25$, ou bien seule la racine positive est retenue ou bien la résolution a consisté à prendre la racine des deux nombres positifs et par définition de la racine, seules les solutions positives sont retenues (auquel cas on pourrait aussi parler de la compatibilité de la racine avec la relation '=').

*le vocabulaire du manuel n'est pas totalement repris. L'enseignante n'emploie pas les termes suivants que nous trouvons dans le manuel.

- radical
- nombre positif, nombre négatif
- carré parfait
- produit.

→ Les remarques, interventions ou questions des élèves que l'enseignante ne semblait pas attendre l'entraînent rarement à adapter son discours.

### *3.2- Deuxième partie du cours : titre II du plan, dernières lignes du tableau de comparaison*

Présentation

La deuxième partie du cours de l'enseignante est « application (des racines) à la résolution d'équations du premier degré », le second degré est annoncé pour la suite « et après on verra du second degré ». Dès l'annonce de la deuxième partie, l'enseignante fait préciser les éléments caractéristiques des équations dont elle parle : premier et second degré à une inconnue.

Le chapitre du manuel auquel nous comparons le discours ne présente pas de partie spécifiquement repérée comme « application des racines carrées à la résolution d'équation du premier degré ». Ainsi, par rapport au manuel, l'enseignante ajoute une partie et a supprimé le troisième point précédent.

La partie ajoutée est constituée de deux problèmes dont les énoncés sont :

> « la hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5cm, trouver x la longueur du côté »
>
> « $x\sqrt{3} - 5 = x\sqrt{12} + x$ »

Etudions chacun des deux problèmes.

## 3.2.1- Premier problème

« La hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5cm. Trouver x la longueur du côté. »

La résolution du problème est suivie d'une vérification que nous allons étudier séparément de la résolution.

### *3.2.1.1- Résolution du problème*

> « P- alors quelqu'un a une idée ?
> « E- c'est égal (bruit) sur 2
> « P- oui alors d'accord c'est ça mais si on met x la longueur du côté, qu'est ce qui faut écrire, qu'est ce qu'on va écrire (bruit) pas directement ?
> « E- ben soit x la longueur du côté
> « P- voilà alors ça s'appelle une…? une é…?

« E- équation
« P- voilà on va essayer d'écrire une équation alors pour trouver l'équation donc x représente le côté pour trouver l'équation, on doit calculer la hauteur en fonction de x d'accord et on sait qu'elle sera égal à 5 ainsi, on pourra écrire l'équation
« E- ah ouais
« P- alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur ?
« E- la hauteur ?
« P- oui
« E- égal racine de 3 sur 2
« P- voilà donc on l'écrit ici, propriété...

### i- Le vocabulaire

Nous avons remarqué lors de l'étude des passages décontextualisés (cf. une histoire d'article) l'utilisation de l'article défini « la » dans « la hauteur ». Toute l'activité de la classe se fait avec les expressions « la hauteur » ou bien « la hauteur issue du sommet ». Nous pouvons aussi remarquer l'article défini « du » dans « la longueur du côté » : les élèves doivent savoir que les longueurs des trois côtés sont les mêmes ainsi que celles des hauteurs.

### ii- Mise en équation du problème et résolution

La mise en équation du problème est guidée par l'énoncé puisque la longueur du côté recherchée est directement indiquée comme inconnue et est notée $x$. La formulation de l'énoncé dépossède les élèves de cette partie de la recherche à effectuer pour résoudre le problème posé. Nous trouvons une confirmation de cette dépossession dans la phrase : « si on met x la longueur du côté, qu'est ce qu'il faut écrire, qu'est ce qu'on va écrire... » à laquelle les élèves répondent en indiquant ce qu'est x « ben soit x la longueur du côté ». Nous pouvons supposer que l'enseignante attendait une autre réponse, réponse appelée à l'aide d'un questionnement sur la nature mathématique qui résultera de l'analyse de l'énoncé « voilà alors ça s'appelle une... ? une é... ? » : elle anticipe la transformation de l'énoncé. Que notre supposition soit vérifiée ou non, nous constatons avec cette dernière question une situation où le projet didactique est allégé puisque l'enseignante indique très fortement aux élèves la réponse attendue. Les élèves n'ayant plus à formuler sous forme d'inconnue ce qui est recherché ni à préciser la nature mathématique de ce qui va permettre de résoudre le problème posé, le travail restant à leur charge est d'appliquer la relation établie précédemment après l'avoir associée au problème. Nous trouvons une autre dépossession du travail mathématique que les élèves peuvent effectuer dans l'indication de cette relation à appliquer fournie par l'enseignante « alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur ? ».

Des éléments que nous pouvons qualifier d'importants pour une « mise en équation » sont indiqués par l'enseignante :

- le choix de l'inconnue,
- la forme mathématique du résultat de la « transformation » d'une écriture de l'énoncé « avec des mots » à une écriture à l'aide de symboles mathématiques,
- le choix de la relation à utiliser.

Nous avons finalement l'impression que le but essentiel poursuivi par l'enseignante n'est pas la « mise en équation » de l'énoncé, dans son discours un élément semble plus important que les autres : l'utilisation de la relation.

A ce moment du cours, la « mise en équation » s'est traduite par l'écriture de l'équation suivante :

$x\frac{\sqrt{3}}{2} = 5$. La suite de la résolution est constituée d'un long passage où les interventions les plus importantes du point de vue de l'activité mathématique engagée sont :

> « ici comment fait-on pour résoudre ce genre d'équation ? »
> « ici lorsqu'on a une égalité, on réduit au même dénominateur de chaque côté »
> «Quand tu réduis au même dénominateur ici et là... et comme j'ai le même (dénominateur), quelle est l'opération que je fais, je multiplie toute l'équation par ? »
> « Oui on les a enlevés (les dénominateurs) parce que tu fais la même opération »
> « Voilà c'est une équation tu fais la même opération des deux côtés. »
> « Alors qu'est ce qu'on avait dit quand j'ai 10 sur racine de 3 ? Est-ce que je peux laisser cette écriture-là ? ».

Nous analysons ces interventions comme une volonté de l'enseignante de rappeler certaines « techniques » de résolution d'équations notamment celles basées sur la compatibilité de la relation d'équivalence « = » avec la multiplication.

Ces rappels permettent de transformer l'équation initiale en ($x\sqrt{3}= 10$). Une question et une précision « et maintenant ? » et « non attention c'est x que je veux trouver donc là ici je dois avoir x égal quelque chose » entraînent le résultat $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Sur demande de l'enseignante, la

fraction $\frac{10}{\sqrt{3}}$ est alors transformée en $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Cette transformation est l'occasion d'utiliser certaines propriétés algébriques de la fonction racine carrée.
Le manuel présente cette transformation sous le titre 5 de la partie « activités » et beaucoup d'exercices portent sur ce genre de transformation. Cette insistance a pu influencer l'enseignante mais d'autres facteurs peuvent en être à l'origine :

- l'habitude de ne pas laisser de radicaux au dénominateur d'une fraction,
- un prétexte à utiliser la propriété $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$.

En posant ce problème, l'enseignante semble motivée par le rappel de « techniques » de résolution d'équation et par la volonté d'entraîner les élèves à appliquer des propriétés algébriques des racines carrées. Nous retiendrons également que son objectif ne semble pas être de mobiliser les connaissances des élèves pour qu'ils s'entraînent à la « mise en équation » d'un problème. Nous remarquions lors du commentaire du passage décontextualisé 13 un décalage entre le titre de la deuxième partie du cours et le contenu qu'il illustre. Nous notons ici un choix de contenu que le titre ne met pas en évidence : les techniques de résolution d'équations. Enfin, nous gardons en mémoire qu'un intérêt semble réservé à la mise en pratique de la relation établie en première partie de cours.
Observons la place occupée par ce problème : il succède à la mise en évidence d'une relation métrique dans le triangle équilatéral, relation indispensable à sa résolution. Il est suivi d'autres résolutions d'équations du premier degré puis du second degré. Nous déduisons alors un autre objectif de l'enseignante : assurer une transition entre la première partie du cours et la seconde.

#### *3.2.1.2- La vérification*

La vérification est une partie que l'enseignante ajoute en conclusion de la réponse au premier problème. Cette partie est assez confuse. On ne sait pas ce que l'enseignante veut faire établir[1] :

[1] Par ailleurs nous nous questionnons : quel statut peut-on attribuer à la vérification ? Dans le contexte où elle est présentée, nous ne lui en trouvons pas. Nous aurions pu lui trouver un petit intérêt si l'enseignante l'avait présentée comme moyen de s'assurer que le résultat obtenu ne présente pas d'erreur…

1- que la solution trouvée est bien racine de l'équation de départ. Auquel cas nous pouvons supposer qu'il s'agit d'un prétexte pour s'assurer que les élèves savent ce que veut dire « vérifier » qu'une valeur est racine d'une équation,

2- que la solution trouvée vérifie bien la relation métrique existant entre la longueur d'un côté et celle d'une hauteur de tout triangle équilatéral. Auquel cas cette solution est effectivement la longueur de la hauteur du triangle de l'énoncé.

Développons un peu.

Nous formulons le premier point en conséquence des phrases suivantes.

> « si c'est une équation
> « Alors comment est ce que je vais faire la vérification ?
> « De l'autre côté j'ai calculé x avec 10√3 sur 3 donc je vais calculer ici le membre de gauche de l'équation et normalement je devrais trouver 5 le membre de droite.
> « Et ici qu'est ce qu'on avait dans le membre de droite ?
> « Oui j'avais le membre de droite qui est égal à 5 donc j'ai bien voilà G = D donc 10√3 sur 3 est bien solution. »

Le vocabulaire employé est très lié aux équations : « x », « équation », « membre de gauche », « membre de droite ». Nous retenons « x » car il nous semble que cette lettre fait davantage référence à la résolution d'(in)équation chez les élèves que « a » ou « h ». D'autre part, l'enseignante dispose de ces deux autres lettres qui intervenaient dans la relation métrique mise en œuvre dès le début du problème. Elle a choisi la lettre « x » très connotée auprès des élèves en même temps qu'elle présentait le problème comme une résolution d'équation. Ainsi il semble qu'elle l'associe elle-même aux équations et donc d'un point de vue que nous qualifierons de décontextualisé par rapport au triangle équilatéral.

Le second point est une conséquence des phrases suivantes.

> « P- alors comment est-ce que je vais faire la vérification ?
> « E- euh ben
> « E- 10 racine de 3 sur 3 multiplié par 5
> « P- Non attention ça c'est le côté, qu'est-ce que je peux calculer avec le côté ?
> « E- la hauteur
> « P- Oui la hauteur
> « (...)
> « P- Alors ici j'ai mon côté a. Je sais que la hauteur va mesurer a racine de 3 sur 2 d'accord donc je vais calculer ça et si normalement je ne me suis pas trompée à quoi je dois arriver ?
> « E- à 5
> « (...)
> « E- parce que en fait là, racine de 3 sur 3 ben c'est a en fait

« P- racine de trois sur trois c'est a
« E- donc après à la place de a on met
« P- Voilà donc on utilise la propriété donc on va l'écrire même propriété hein on va pas la réécrire même propriété... »
« (...)
« P- alors Jérôme ?
« E- non c'était pour savoir d'où venait le racine de 3 sur 2.
« P- quand j'ai un côté d'accord d'un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure a racine de 3 sur 2 donc a c'est multiplié par racine de 3 le tout sur 2...

Toutes ces interventions sont contextualisées au triangle, elles sont provoquées par des remarques ou des questions d'élèves. La lettre « a » est réapparue et la relation métrique est citée. Notons que la proximité dans le temps de la classe du travail sur la relation métrique dans le triangle rectangle est peut-être trop importante pour que les élèves se détachent de cette situation. Ainsi, leurs interventions qui tendent à rester dans le cadre de la relation entre hauteur et côté entretiennent une confusion que l'enseignante ne lève pas puisqu'elle répond dans le même registre. Il semblerait ici que l'activité sur le triangle soit trop mobilisatrice pour que l'enseignante réussisse à en détacher la classe. Si nous maintenons notre première supposition nous devons nous rendre à l'évidence que l'objectif est contrarié par les passages contextualisés où l'enseignante ne dissocie pas la racine de l'équation de la longueur de la hauteur du triangle. Le dialogue avec les élèves contraint l'enseignante à tenir deux discours contextualisés différemment. Si nous maintenons notre deuxième supposition alors l'enseignante ne place pas totalement les élèves dans le cadre de la résolution d'équation et ce problème constitue effectivement une transition entre la première partie et la suite « résolution d'équation ».

Deux cadres interviennent au cours de la vérification : le cadre "algébrique" où il s'agit de vérifier qu'un nombre réel est racine d'une équation. Le cadre "géométrique" où il s'agit de vérifier qu'un nombre représente bien une longueur à l'aide d'une relation métrique dans laquelle il intervient. Ici, les deux sont emmêlés et un élève peut ne pas les distinguer. Les interventions de l'enseignante peuvent ne pas être suffisantes pour montrer qu'ils se répondent.

### 3.2.2- Deuxième problème

L'équation à résoudre est $x\sqrt{3}-5=x\sqrt{12}+x$.

A la fin du premier problème, l'enseignante notifiait aux élèves qu'il n'était pas nécessaire de reproduire la démonstration du calcul de la longueur de la hauteur dans un triangle équilatéral quand ils ont besoin d'appliquer le résultat : « vous n'avez pas besoin de refaire tous les calculs (...) vous utilisez la propriété, vous avez directement le résultat ». Les calculs qui ont conduit à « la propriété » permettent effectivement « d'appliquer la racine carrée » c'est-à-dire de l'utiliser comme outil. Le premier problème nécessitait l'application de la « propriété », la manipulation des propriétés opératoires des racines carrées mais il ne nécessitait pas la mise en œuvre de l'outil « racine carrée ». Le deuxième problème met en jeu les propriétés algébriques des racines carrées ainsi que d'autres résultats d'algèbre, ici aussi la racine n'est pas un outil, elle est un objet. Le premier problème constituait un lien avec l'activité le précédant puisqu'il nécessitait la relation métrique établie dans le triangle équilatéral entre la longueur d'un côté et celle d'une hauteur. C'est peut-être l'utilisation de cette relation qui explique le choix de l'enseignante du mot « application » puisque pour cette relation il faut effectivement utiliser la racine carrée. Cependant, malgré cette application, rien ne justifie l'expression « application des racines » . Le constat est le même pour le deuxième problème.

Formulons trois remarques :

- De façon analogue au premier problème, un constat s'impose : la racine carrée n'est pas utilisée comme outil de résolution de l'équation, les rôles sont inversés ; la résolution d'équation du premier degré est utilisée pour appliquer les propriétés multiplicatives des radicaux.
- Ce deuxième problème constitue aussi un ajout de la part de l'enseignante, cette équation n'est proposée nulle part dans le chapitre 10 du manuel.
- Nous commentons la résolution de l'équation dans les passages 24, 25, et 26 de l'étude des passages décontextualisés.

Compte tenu de cette dernière remarque, nous traiterons le deuxième problème très rapidement en indiquant les points qui nous ont paru les plus importants pour la comparaison au manuel.

Formulons immédiatement une remarque : quand l'activité semble bien fonctionner, les termes employés par l'enseignante sont du registre familier.

Nous avons constaté comme ressemblance avec le manuel les deux points suivants :

1- L'enseignante assimile le calcul de $(x\sqrt{3}-2x\sqrt{3})$ à (y - 2y) : le manuel en fait autant dans « ce qu'il faut savoir faire 1. réduire des écritures ».

Les élèves proposent plusieurs fois une factorisation :

> « facteur, c'est en factorisant Madame »

L'enseignante insiste sur la similitude avec (y - 2y) :

> « Quand j'ai ça quelque chose moins deux fois la même chose. Quand j'ai y - 2y ça fait combien ?
> Alors regarde quand j'ai un paquet je l'appelle y d'accord, ici j'ai le même paquet alors j'ai (y - 2y),
> un gâteau moins deux gâteaux... »

Nous constatons que les propositions des élèves n'ont pas d'effet sur le discours de l'enseignante même si elles traduisent correctement la situation.

2- L'enseignante privilégie la factorisation pour certains cas, par exemple pour l'expression $(-x\sqrt{3}-x)$ :

> « P- oui on peut arranger, on peut pas calculer donc on peut ?
> « E- factoriser on met x
> « P- oui voilà. »

Le manuel expose la même démarche dans « ce qu'il faut savoir faire 4. Factoriser » (page 178).

En conclusion, la méthode de calcul exposée par le manuel est la même que celle présentée par l'enseignante malgré les propositions différentes mais correctes des élèves. Leurs propositions montrent la reconnaissance d'une propriété algébrique que l'enseignante n'adopte pas malgré son importance. Son discours peut apporter des perturbations à la consolidation des connaissances que les élèvent sont en train de construire et qu'ils expriment. Son discours peut contribuer à renforcer l'idée de certains élèves que les racines carrées de nombres ne sont pas toutes des nombres puisque leur traitement algébrique n'est pas le même que pour les autres nombres. Nous dirons ici que l'enseignante n'a pas utilisé ses connaissances.

### 3.2.3- Conclusion

Nous avons l'impression que l'enseignante a remplacé une partie du chapitre du manuel par des applications dont l'objectif est d'assurer un lien entre le début et la fin du cours qui sera, en fait, vu lors de prochaines séances. Le titre de cette partie "substituée" n'est pas tout à fait adéquat. D'autre part, la vérification est une partie du contenu qui peut entraîner les élèves dans des confusions que l'enseignante ne semble pas pointer.

### 3.2.4- Quelques commentaires sur un certain vocabulaire utilisé par l'enseignante

**La hauteur, une hauteur - un côté, le côté* :

Nous reprenons ici les épisodes 1, 2 et 3 de l'analyse du discours décontextualisé.

Toute l'activité se fait avec les expressions la hauteur ou la hauteur issue d'un sommet. Quand la formule (h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$) est établie et que l'enseignante passe à son application en deux exemples directs, des élèves interviennent sur l'article "la". En réponse, l'enseignante précise qu'il faut dire une hauteur en justifiant « une » par le fait qu'il y a trois hauteurs dans le triangle et qu'il faut préciser celle dont il est question. Par la suite, elle reprendra « la hauteur » sans précision particulière. Une même situation se retrouve autour de l'article à associer à « côté » d'un triangle équilatéral. Dans cette situation, l'enseignante emploie l'argument de même longueur des côtés et utilise l'article défini « le » pour désigner un quelconque côté. Les réponses ne sont pas constantes. Finalement un élève peut éprouver de la difficulté à tirer des conclusions claires et établir une différence entre côté segment et côté longueur.

Le manuel propose deux activités sur le triangle équilatéral, la première est la même que celle traité en cours par l'enseignante : "Calcul des longueurs en géométrie", elle indique de façon précise la hauteur à calculer ; "la hauteur [AH] ". L'exercice n°50 page 182 propose comme énoncé « le côté d'un triangle équilatéral a pour longueur 5cm. Quelle est la valeur exacte de la longueur d'une hauteur de ce triangle ? ». L'article de « côté » est défini mais on ne sait pas de quel côté il s'agit tandis que l'article de « hauteur » est indéfini. Nous constatons une expression semblable à celle de l'enseignante.

Les justifications apportées par l'enseignante étaient insuffisantes ou contradictoires. Nous constatons que la rédaction du manuel n'est pas plus précise puisque l'attention d'un lecteur n'est pas attirée sur ce point : c'est ce que nous avons observé dans le discours de l'enseignante.

Pour ce vocabulaire, tout se passe comme si au cours de la préparation du cours l'enseignante n'avait pas envisagé le questionnement des élèves ce qui revient à dire qu'à ce moment situé hors de la classe, l'enseignante ne semble pas vigilante à certains détails de vocabulaire. Nous remarquons de même que le manuel ne semble pas avoir envisagé ce point de vocabulaire. La partie qui nous intéresse actuellement, située lors du cours en classe, révèle en tout cas que le discours ne traduit pas une mobilisation des connaissances de l'enseignante aux moments où les élèves la sollicitent.

### 4- Conclusion de la comparaison du discours de E1 et du texte du manuel

Nous notons une très forte présence de deux documents : le manuel et le texte de préparation de l'enseignante.

L'enseignante s'emploie à répondre aux questions du manuel comme beaucoup d'élèves le feraient. Le souci semble davantage être la production d'une bonne réponse que les éléments constitutifs de cette "bonne réponse" qui peuvent être spécifiques ou plus généraux. Nous voulons dire en cela qu'il semble que l'attention apportée à produire une réponse correcte soit plus importante que celle apportée aux éléments constitutifs de cette réponse (que ceux-ci soient spécifiques à la réponse ou plus généraux) : le comment est privilégié au pourquoi. Ce faisant, l'enseignante occulte certains éléments importants au lieu de provoquer à l'aide des questions du manuel l'explicitation des constructions mathématiques attendues des élèves.

Le texte de préparation constitue une contrainte puisque des propositions correctes des élèves sont écartées au profit de ce qui semble être ce texte.

D'un point de vue mathématique, nous trouvons des imprécisions, des explications confuses par la contradiction qu'elles portent, des situations non exploitées en fonction des buts annoncés, des parties de raisonnements non mises en évidence, des connaissances non utilisées.

D'un point de vue didactique nous trouvons que les constructions demandées aux élèves sont allégées, cette situation peut satisfaire certains élèves car leur travail mathématique est très réduit et effectué par l'enseignante. Nous trouvons des décontextualisations effectuées sans qu'elles ne soient signalées, des transitions ancien/nouveau maladroites.

L'enseignante expose aux élèves ses connaissances de niveau (n) portant sur la racine carrée, elle ne les entraîne à exposer les leurs que lorsqu'ils exposent des arguments qu'elle ne semblait pas attendre, auquel cas elle les conduit souvent à dire ce qu'elle voulait entendre.

Les explications sont très simplifiées, contextualisées et particularisées à des niveaux qui s'approchent de niveaux inférieurs à celui de la Troisième.

Tout se passe comme si le texte du manuel contribuait à contrarier la référence à des connaissances de niveau (n+p).

## *B- Comparaison du discours de l'enseignante E2 et du texte du manuel*

Nous comparons le discours de l'enseignante E2 et le texte du manuel « MATHS IREM DE STRASBOURG 3e. istra 1993 ». Quatre paragraphes constituent cette comparaison, nous présentons le texte du manuel et l'exposé de l'enseignante dans le premier paragraphe. Le second expose un tableau de comparaison globale entre ces deux documents, complété de quelques précisions sur les ressemblances et les dissemblances que nous avons constatées. Nous réservons le troisième paragraphe à des comparaisons plus locales auxquelles nous avons ajouté d'autres analyses qui nous permettent de mieux cerner l'intervention du manuel dans le cours de l'enseignante. Le dernier paragraphe est une conclusion.

### 1- Présentation du manuel et de l'exposé de l'enseignante

Nous décrivons les deux contenus comparés. Les principaux éléments de ces descriptions seront dressés dans deux tableaux comparatifs au paragraphe suivant.

#### *1.1- Le texte du manuel*

Le chapitre 6 du manuel consacré à la trigonométrie est composé de quatre parties. La première intitulée « Activités » présente quatre activités numérotées de un à quatre. La seconde partie est intitulée « cours » et comporte cinq titres. La troisième partie « ce qu'on attend de moi » est subdivisée en deux. Enfin, la dernière partie présente un recueil d'exercices.

Les activités de la première partie font apparaître des renvois au « cours » et à des exercices, indiqués en marge du texte sous forme de numéros de titres du cours ou de numéros d'exercices.

Exemple :

Activité 1 : Définitions et calculatrice

| cours : 1<br>Exercices A à E | texte de l'activité |
|---|---|

Compte tenu des comparaisons que nous voulons établir, nous allons nous intéresser aux deux premières parties : « activités » et « cours » qui se suivent dans cet ordre. Nous ne décrirons que les trois premières activités de la première partie. Ce choix nous est dicté par le contenu du cours abordé par l'enseignante. En effet, une première lecture nous a permis de constater une certaine correspondance entre les thèmes traités par les trois activités du manuel que nous nous proposons de décrire et l'exposé de l'enseignante. Le contenu de la quatrième activité n'est pas mentionné par l'enseignante.

Nous aborderons la partie « cours » en même temps que la partie « activités » pour deux raisons. La première est liée à la répartition du chapitre en quatre parties et aux liens proposés entre les « activités » et le « cours » à l'aide des renvois. Les deux parties « activités » et « cours » semblent ainsi complémentaires tandis que la troisième partie « ce qu'on attend de moi » n'est qu'une reprise des principaux résultats des deux premières parties. La deuxième raison de notre choix est liée à l'exposé de l'enseignante qui – nous le verrons – n'est pas exactement celui du texte du manuel. Nous estimons donc qu'il est inutile de détailler l'ensemble du chapitre.

Les intitulés des activités sont les suivants :

Activité 1 : Définitions et calculatrice

Activité 2 : Calculs dans un triangle rectangle

Activité 3 : A la découverte des propriétés

Activité 4 : Angle inscrit et angle au centre

Nous allons maintenant décrire en quelques lignes chacune des trois premières activités.

Nous emploierons parfois le terme « fonction » pour désigner « cosinus », « sinus » ou « tangente », mot qui n'apparaît pas dans l'exposé du manuel.

*Activité 1*

En marge de l'activité 1 est indiqué Cours : 1 et Exercices : A à E. Le cours numéroté 1 porte sur les définitions des rapports trigonométriques et indique comment utiliser la calculatrice. En marge du cadre des définitions figure un triangle rectangle où sont désignés l'hypoténuse, le côté adjacent à l'un des angles et le côté opposé au même angle.

L'activité comporte plusieurs questions. Il est demandé de tracer sur du papier millimétré un angle de mesure 20° et de donner les valeurs respectives des fonctions cosinus, sinus et tangente pour cette mesure. Deux procédures de calcul sont proposées : « par lecture graphique » puis à l'aide de « la calculatrice ». Le procédé « par lecture graphique » permet d'appliquer les définitions données par le cours dont la référence suit entre parenthèses (la même que celle de la marge). Le second procédé est certainement destiné à l'utilisation des touches « sin », « cos » et « tan » de la calculatrice, procédé lui aussi indiqué par le titre 1 du « cours ». Suivant ces deux procédures de calcul, les élèves sont appelés à compléter un tableau de valeurs que prennent les fonctions cosinus, sinus et tangente pour des angles dont une mesure est indiquée dans le tableau. Au vu des valeurs recueillies, des conjectures sont demandées sur les variations de chacune des trois fonctions. Enfin le manuel interroge sur une éventuelle proportionnalité entre les mesures des angles et les valeurs des fonctions trigonométriques relevées pour ces mesures.

*Activité 2*

A partir des valeurs numériques donnant les mesures des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ou donnant la mesure d'un côté et la valeur de l'une des trois fonctions trigonométriques de l'un des angles du triangle (autre que le droit), il est demandé de déduire toutes les autres mesures de côtés et d'angles ainsi que les valeurs des cosinus, sinus et tangente manquantes. Tout ceci est présenté sous forme de tableau avec un dessin d'illustration.

Cette activité est associée à la partie 2 du cours qui donne un tableau des valeurs de cosinus, sinus et tangente de quelques angles particuliers. La partie 2 est illustrée de deux exemples : la mesure de la hauteur d'un triangle équilatéral donnée en fonction de la longueur d'un côté et la longueur d'une diagonale d'un carré en fonction de celle d'un côte du carré.

*Activité 3*

Le tableau de l'activité précédente est exploité pour conduire à la comparaison du rapport $\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ et de $\tan\hat{B}$ puis à la mise en évidence de la relation $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B} = 1$.

Cette activité est associée à la partie trois du cours qui expose certaines propriétés des trois fonctions trigonométriques.

### *1.2- L'exposé de l'enseignante*

Nous emploierons les termes « fonction » ou « rapport trigonométrique » pour désigner cosinus, sinus et tangente. Si parfois l'enseignante utilise les mêmes mots, nous l'indiquerons par des guillemets.

Après avoir précisé aux élèves qu'il est inutile de regarder dans le manuel, l'enseignante installe le cadre dans lequel la classe va travailler :

- en rappelant que la trigonométrie avait été vue l'année précédente avec « le cosinus », elle précise qu'il s'agira de ne considérer que des triangles rectangles et profite de la calculatrice pour introduire les deux autres fonctions sinus et tangente.

- elle procède à un rappel des termes couramment utilisés dans le triangle rectangle ; hypoténuse, côté adjacent, côté opposé en les caractérisant. Elle les illustre par le dessin d'un triangle ABC rectangle en A puis fait remarquer que dire d'un côté qu'il est « opposé » ou « adjacent » à un angle dépend de l'angle considéré. Elle remarque aussi qu'un angle définit deux côtés adjacents : « en fait au départ y'a deux côtés qui touchent, l'angle B ».

Un détour sur la relation entre « côté adjacent » et « cosinus » vue l'année passée permet à l'enseignante de donner les définitions des cosinus, sinus et tangente dans le triangle rectangle. Elles sont présentées à l'aide des termes rappelés auparavant et appliqués à l'angle (de sommet) B du triangle ABC rectangle en A. Ces définitions sont ensuite traduites pour l'angle B à l'aide des lettres désignant les côtés du triangle ABC pris pour exemple. Il est aussi rappelé que cosinus est un nombre « compris entre zéro et un », plus loin qu'il a été introduit comme rapport de projections orthogonales et enfin, lors d'un exercice, que le

cosinus est une quantité sans unité. Il est remarqué toujours pour le triangle ABC rectangle en A que cos C = sin B, cos B = sin C et tan B = 1/tan C.
La fin du cours est réservée à une application numérique. L'enseignante donne un triangle DEA rectangle en A tel que DE = 4 et AE = 6, demande une mesure de l'angle DEA au degré près puis laisse la parole aux élèves pour préciser toutes les autres mesures qu'ils peuvent trouver dans le triangle. Cette application est l'occasion de commenter l'utilisation de la calculatrice pour obtenir une valeur de "l'angle" dont le "sinus" est connu et la procédure à suivre, suivant les calculatrices, pour obtenir le "sinus" connaissant "l'angle".

En conclusion, nous indiquons les points communs au cours de l'enseignante et au manuel ainsi que les points de distinctions dans les deux tableaux suivants.

## 2- Comparaison globale complétée de précisions

Nous donnons une vue globale dont l'objectif est de déterminer l'essentiel des points de ressemblance et de dissemblance émanant d'une lecture peu détaillée des contenus du manuel et du cours de l'enseignante.

### *2.1- Tableaux de comparaison*

*Explications relatives à la constitution et à la lecture des tableaux*

La dernière colonne des tableaux est réservée au discours de l'enseignante, les autres présentent un aperçu du texte du manuel. Les titres du manuel sont reproduits tels que dans celui-ci. Les écritures en italiques signifient que nous avons remplacé un contenu spécifique par une description ou un résumé. La première colonne des tableaux présente les activités du manuel. Au bas des activités, nous avons indiqué les références au « cours » et « exercices » que l'on trouve en marge de celles-ci dans le manuel. Ces références ont motivé notre présentation du contenu du chapitre sous forme de deux ou trois colonnes suivant le tableau. Ces dernières colonnes présentent le cours précisé en référence. De la sorte, le « cours » correspondant à chaque activité lui fait face. Nous avons disposé le discours de l'enseignante au niveau des contenus des « activités » et du « cours » du manuel auxquels il pouvait correspondre même s'il ne leur était pas exactement identique. Nous précisons par des numéros l'ordre dans lequel l'enseignante aborde les différents éléments de son cours. Les titres que nous indiquons sont déduits des propos de l'enseignante, si le vocabulaire est le sien il apparaît entre guillemets sinon, nous écrivons en italique. De même que pour les titres, les propos de l'enseignante sont signalés entre guillemets et ce que nous résumons est écrit en italique.

*Premier tableau*

La première des trois colonnes du manuel fait référence à l'activité 1 de la partie « activités », les deux suivantes au titre 1 de la partie « cours ». Les contenus de ces deux dernières sont en vis-à-vis dans le manuel. Nous avons respecté cette disposition en adoptant une présentation sur deux colonnes séparées d'un trait pointillé. Chaque titre est développé et illustré d'exemples. Au contraire des exemples, les développements sont inscrits dans un cadre. Nous ne reproduisons pas les cadres.

*Deuxième tableau*

Seules deux colonnes sont réservées au manuel. La première reproduit les activités 2 et 3 et la deuxième les titres 2 et 3 du « cours ».

# MANUEL : chapitre 6 Trigonométrie

*Partie « Activités » du chapitre*

## ACTIVITÉ 1 Définitions et calculatrice

1) prendre une feuille de papier millimétré. Tracer, comme ci-dessous, un quart de cercle de centre $O$ et de rayon 10 cm :

*une feuille de papier millimétré est représentée sur laquelle est tracé un quart de cercle de centre O. Deux points A et $A_2$ sont notés sur le tracé. Sur le cercle trigonométrique, ce quart de cercle serait le premier quadrant et A l'origine. Une partie de rapporteur est représentée, le zéro étant sur le segment [OA] et 90° sur le segment vertical d'extrémité O. Enfin, le segment [O $A_2$] est tracé ainsi que le segment formé par $A_2$ et son projeté orthogonal sur le segment [OA]*

2) Marquer sur ce cercle le point $A_2$, tel que $AOA_2 = 20°$.
Regarder le cours (1p. 87), puis obtenir par lecture graphique : cos 20°, sin 20° et tan 20°.
Comparer avec ce que donne la calculatrice.

3) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

*il s'agit d'un tableau de 4 lignes et 8 colonnes. Les colonnes indiquent des mesures d'angles, les lignes sont réservées aux valeurs obtenues par lecture graphique puis par calcul à la calculatrice des cosinus, sinus et tangente.*

4)Comment varie le cosinus d'un angle ? Admet-il une valeur maximale ? une valeur minimale ?
Mêmes questions pour le sinus et la tangente.

5) Y'a-t-il proportionnalité entre :
- le cosinus d'un angle et sa mesure ?
- le sinus d'un angle et sa mesure ?
- la tangente d'un angle et sa mesure ?

*Les renvois en marge de cette activité sont*
*Cours : 1*
*Exercices : A à E*

*Partie « cours » du chapitre*

### 1. Relations trigonométriques

***Définitions :***
Soit un triangle $ABC$ rectangle en $B$.

Le cosinus de l'angle $\hat{C}$ est égal à : $\dfrac{\text{côté adjacent à } \hat{C}}{\text{hypoténuse}}$

Le sinus de l'angle $\hat{C}$ est égal à : $\dfrac{\text{côté opposé à } \hat{C}}{\text{hypoténuse}}$

La tangente de l'angle $\hat{C}$ est égal à : $\dfrac{\text{côté opposé à } \hat{C}}{\text{côté adjacent à } \hat{C}}$

On note ces nombres $\cos\hat{C}$, $\sin\hat{C}$ et $\tan\hat{C}$.

***Exemple :***

On a : $\cos\hat{C} = \dfrac{BC}{AC}$, $\sin\hat{C} = \dfrac{AB}{AC}$

et $\tan\hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$

***Calculatrice et trigonométrie :***

Une calculatrice permet de déterminer une valeur approchée:

- du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné ;
on utilise les touches : Cos, Sin et Tan ;

- de la mesure de l'angle aigu dont le cosinus, le sinus ou la tangente sont donnés ; on utilise les touches : $Cos^{-1}$, $Sin^{-1}$, et $Tan^{-1}$.

Vérifier que la calculatrice est en mode degré !

***Exemples :***

**a)** 50 Sin → 0,7660444
donc sin 50° ≈ 0,77

**b)** 2 $Tan^{-1}$ → 6,3434949
donc tan 63° ≈ 2

## ENSEIGNANTE

**1- « Rappels »**

**a)** « On a vu la trigonométrie avec le cosinus, dans le triangle rectangle, il y avait d'autres touches que cos sur la calculatrice »
**b)** *Vocabulaire dans un triangle ABC rectangle en A : hypoténuse, côté opposé, côté adjacent, caractéristiques et utilité.*

**2- « Définitions »**
*dans le même triangle ABC*

« $\cos B = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ »

« $\sin B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ »

« $\tan B = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ »

**3- « Application »**
*dans le même triangle ABC l'enseignante demande aux élèves d'établir l'expression de cos B, sin B et tan B en fonction des côtés [AB], [AC] et [BC].*

| **MANUEL** *Partie « activités » du chapitre* | *Partie « cours » du chapitre* | **ENSEIGNANTE** |
|---|---|---|
| **ACTIVITÉ 2 Calculs dans un triangle rectangle**<br><br>on considère un triangle ABC rectangle en A.<br>On pose AB=c, AC=b et BC=a.<br>*Un triangle ABC est représenté en marge du texte, les lettres a, b et c sont indiquées à côté des segments qu'elles mesurent, l'angle droit est représenté par un petit carré.*<br><br>Recopier et compléter le tableau ci-dessous.<br><br>Faire une figure pour chacun des six cas, et compléter le tableau au fur et à mesure :<br>*Les élèves ont à calculer les valeurs de a, b, c, $\cos\hat{B}$, $\cos\hat{C}$, $\sin\hat{B}$, $\sin\hat{C}$, $\tan\hat{B}$, $\tan\hat{C}$, $\hat{B}$ (valeur approchée) $\hat{C}$ (valeur approchée). Deux de ces valeurs sont indiquées. Cette série se répète 6 fois et l'ensemble est présenté dans un tableau.*<br><br>*Les renvois en marge de cette activité sont*<br>*Exercices : F à O.*<br>*Cours : 2.*<br>*Exercices : P à U.* | **2. Angles particuliers**<br><br>*Tableau indiquant les valeurs des cosinus, sinus et tangente des angles 0°, 30°, 45°, 60° et 90°.* | **5.c-** *Utilité des rapports trigonométriques*<br><br>**6-** ***Application :*** *calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle* |
| **ACTIVITÉ 3 À la découverte de propriétés**<br><br>1) Dans chacun des cas de l'activité 2 :<br>**a)** comparer $\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ et $\tan\hat{B}$,<br>**b)** calculer l'expression $\cos^2\hat{B}+\sin^2\hat{B}$ .<br>**2)** que remarque-t-on ? Le démontrer dans le cas général en considérant un triangle ABC rectangle en A.<br><br>*Les renvois en marge de cette activité sont :*<br>*Cours : 3*<br>*Exercice : V* | **3. Formules**<br><br>***Propriétés :***<br><br>Pour tout angle aigu $\hat{C}$ : $\cos\hat{C} \leq 1$ $\sin\hat{C} \leq 1$<br>$\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$ et $\tan\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}}$ (avec $\hat{C} \neq 90°$). | **4-** ***Remarques*** **- Rappels**<br>a) « Cosinus était un nombre compris entre 0 et 1 » *car dans le rapport qui définit le cosinus de l'angle de sommet B du triangle rectangle ABC, le dénominateur est supérieur au numérateur.*<br>b) « Cosinus était un rapport de projections orthogonales ».<br><br>**5-** ***Retour aux définitions***<br>a) *Ecriture des cosinus, sinus et tangente de l'angle C.*<br>b) *On remarque de ces relations que :*<br>« cos B = sin C, sin B = cos C et $\tan B = \frac{1}{\tan C}$ »<br>« pour les angles complémentaires, cosinus et sinus sont égaux ». |

### *2.2- Les ressemblances et dissemblances*

#### 2.2.1- Les points communs

Nous relevons les points communs suivants :

- l'objet du premier cours de l'enseignante sur la trigonométrie identique à celui du début du chapitre du livre sur la trigonométrie,

- les définitions données pour cosinus, sinus et tangente,

- la présentation de ces définitions à l'aide du vocabulaire « côté opposé, adjacent, hypoténuse » et à l'aide d'un triangle support (titre 2 de la colonne "enseignante" et titre 1 de la colonne "manuel-cours" du tableau),

- un rappel de signification des différents termes qui seront employés pour donner les définitions des cosinus, sinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle,

- l'utilisation de la calculatrice,

- un encadrement des valeurs que prend la fonction cosinus,

- les compétences attendues des élèves et présentées dans le manuel dans la partie « ce qu'on attend de moi » (qui ne figure pas dans le tableau de comparaison),

- une similitude dans la façon de procéder de l'enseignante où des "résultats théoriques" sont amenés par des déductions de résultats qui semblent "pratiques" et dans la façon de procéder du manuel où « activités » et « cours » sont imbriqués.

#### 2.2.2- Les changements, suppressions, ajouts

Remarque préalable : les termes « ajouts », « changements » et « suppressions » laissent entendre que l'enseignante a adopté le contenu du chapitre du manuel avec son organisation comme trame de son cours. Nous ne sous-entendons rien de tel, pour l'instant, notre objectif est de caractériser les dissemblances en prenant comme base de comparaison le manuel afin de conclure – entre autre – à une telle adoption ou non.

### *2.2.2.1- Les changements*

L'ordre dans lequel l'enseignante aborde les éléments de connaissances à acquérir diffère de celui du manuel. Les autres changements sont soulignés par les points b et c qui suivent.

### *2.2.2.2- Les suppressions*

L'enseignante supprime les trois activités qui peuvent correspondre à son cours. Ce point est important puisque l'ensemble du chapitre est basé sur ces activités : ainsi, les supprimer indique une certaine "autonomie" de l'enseignante par rapport au manuel.

### *2.2.2.3- Les ajouts*

L'enseignante formule :

- un commentaire sur les rappels de signification des différents termes qui seront employés pour donner les définitions des cosinus, sinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle,
- des remarques suites aux définitions de ces termes, non provoquées par les élèves, directement proposées par l'enseignante,
- une démonstration orale pour établir le fait que la fonction cosinus ne prend que des valeurs positives inférieures à un,
- des propos sur le cosinus rappelant qu'il est le rapport de projections orthogonales.
- Des relations entre les expressions de sinus, cosinus et tangente des angles aigus du triangle rectangle.

L'enseignante utilise un triangle ABC rectangle en un sommet différent de celui du manuel.

### 2.2.3- Un commentaire

Certains points sont obligatoirement communs : les définitions, l'utilisation de la calculatrice et certains « savoir-faire » attendus des élèves.
Le cours observé était le premier de l'année portant sur la trigonométrie, un ou plusieurs l'ont peut-être suivi – nous n'avons aucune indication, certains contenus semblables au chapitre du livre de la classe y auront peut-être été développés. Le matériel dont nous disposons ne nous permet pas d'en préjuger.

### 2.2.4- Conclusion

Cette première comparaison nous procure deux enseignements.

1- Le manuel semble être source "d'inspiration" pour l'enseignante. Nous pouvons supposer que cette source l'entraîne à présenter directement les définitions de cosinus, sinus et tangente comme il est fait dans le manuel.

2- Le manuel ne semble pas "contraignant" à l'enseignante qui détaille certains éléments y figurant mais qui ajoute des informations, présente des résultats différemment et supprime les activités.

Au terme de cette comparaison, nous avons l'impression que le manuel constitue une source d'inspiration peu contraignante pour l'enseignante.

## 3- Comparaisons locales

### *3.1- Comparaisons directes*

Cette deuxième partie va nous confirmer qu'il existe une certaine "indépendance" entre le texte du manuel et le cours de l'enseignante.

Les éléments que l'enseignante expose apparaissent en partie dans les deux premières activités du manuel ainsi que dans la première et la troisième partie du texte du manuel intitulé « cours ».

Puisque l'enseignante ne suit pas à la lettre le texte du manuel, nous allons parler de "thèmes" abordés communs au manuel et à l'enseignante.

Nous développons deux thèmes : celui de la calculatrice et celui des propriétés.

### 3.1.1- Le thème de la calculatrice

La calculatrice est toujours nécessaire à l'accomplissement des deux activités du manuel qui nous intéressent.

Pour la première activité, il s'agit explicitement de calculer des valeurs de cosinus, sinus et tangente de mesures d'angle avec la calculatrice après les avoir calculées "à la main". Cette activité fait référence au point 1 « relations trigonométriques » du cours du manuel où nous trouvons un encadré présentant les possibilités offertes par la calculatrice en termes de calcul de la valeur d'une fonction trigonométrique connaissant une mesure d'angle et, réciproquement en termes de détermination d'une mesure d'angle connaissant la valeur prise par l'une des fonctions trigonométriques pour cette mesure.

La deuxième activité nécessite elle aussi l'utilisation de la calculatrice pour certains calculs où il s'agit de donner des mesures d'angles dont les valeurs de cosinus, sinus ou tangente ont été calculées au préalable ou bien sont données.

Dès le début du cours l'enseignante emploie la calculatrice comme un prétexte, en faisant remarquer qu'il y a d'autres touches que « cosinus » sur la calculatrice. Ainsi, les fonctions sinus et tangente restreintes au triangle rectangle sont introduites. Suit alors un rappel sur le vocabulaire employé dans le triangle rectangle :

> « P- alors on a vu le cosinus et l'année dernière lorsqu'on utilisait la calculatrice, vous aviez vu aussi qu'il y avait d'autres touches…
> « P- sinus oui et il y en avait une troisième
> « E- tan
> « P- c'est quoi tan ?
> « E- tangente

« P- la tangente. Donc finalement, dans le triangle rectangle on va voir trois définitions, celle du cosinus que vous « connaissez que vous allez me rappeler, celle du sinus et celle de la tangente. alors vous allez prendre le cahier de cours, c'est un nouveau chapitre. On va commencer par un petit rappel sur le triangle, sur le vocabulaire qu'on utilise dans le triangle rectangle ».

Un autre lieu d'utilisation de la calculatrice apparaît dans le cours lors de la résolution d'un exercice où il s'agit de donner une mesure d'angle connaissant deux côtés d'un triangle rectangle, l'un d'eux étant l'hypoténuse. La calculatrice entraîne l'enseignante à parler de fonction et à rappeler la notion de fonction inverse que le manuel ne mentionne pas dans ce chapitre :

« P- on travaille dans un triangle rectangle ADE, rectangle en A, on connaît AD, on connaît DE et on voudrait connaître la mesure DEA.
(...)
« P- alors comment est-ce qu'on va faire ?
(...)
« E- le sinus
« P- le sinus
« E- de l'angle E
« P- l'angle tu dis l'angle E. Alors c'est-à-dire l'angle DEA, de cet angle là
(...)
« P- (...) le sinus de l'angle DEA c'est deux tiers. Est-ce qu'on va pouvoir maintenant trouver l'angle DEA ?
« E- oui
« P- qu'est-ce qu'il nous faut ?
(inaudible)
« P- la calculatrice oui déjà. Alors la calculatrice, qu'est-ce qu'on va devoir taper pour obtenir l'angle DEA ?
« E- faut faire l'inverse
« E- l'inverse
« P- oui Julie
« E- l'inverse de sinus puis après
« P- alors est-ce qu'on commence par écrire l'inverse de sinus puis ?
« E- ça dépend des calculatrices
« P- eh oui, ça dépend des calculatrices, pour certaines calculatrices il faut d'abord écrire la fonction qu'on utilise... »
(...)
« P- sinus moins un, c'est-à-dire qu'on fait ?
« P- le contraire d'accord c'est la fonction contraire. La fonction on appelle ça la fonction ?
« E- inverse
« P- pas inverse parce qu'en fait l'inverse on le réserve plutôt à un sur quelque chose. On dit que c'est la fonction « réciproque ou contraire. »

L'utilisation de la calculatrice comme moyen de calculer la valeur de l'une des trois fonctions trigonométriques au programme, une mesure d'angle étant donnée et tel que le manuel le présente en première activité n'est pas l'objet d'une partie spécifique du cours de l'enseignante. Elle le rappelle à l'occasion d'une activité :

« P- quand on veut l'angle on fait sinus moins un, si on voulait le sinus on aurait tapé sinus »

La deuxième utilisation de la calculatrice où il s'agit de déterminer une mesure d'angle connaissant la valeur prise par l'une des trois fonctions trigonométriques pour l'angle en question est commune au manuel et à l'enseignante. Pour le manuel, il s'agit de l'activité 2 et du premier point de la partie intitulée « ce qu'on attend de moi ». Pour l'enseignante, il s'agit de résoudre un exercice qui pourrait porter le titre que le manuel donne à ce premier point : savoir calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle. Nous remarquons ici une partie commune mais la suite que l'enseignante donne n'est pas la même.

Au terme de cette comparaison, nous constatons une similarité dans l'utilisation de la calculatrice comme "machine à calculer" ce qui paraît normal, et une utilisation chez l'enseignante comme prétexte pour introduire une partie du cours qui n'est pas exposée par le manuel. De plus, nous avons remarqué l'opportunité saisie par l'enseignante de préciser un terme spécifique aux relations « fonction réciproque ou contraire », qui laisse entendre que sinus n'est pas uniquement un nombre. Cette situation est provoquée par le mot « fonction » que l'enseignante a employé pour parler de la touche de la calculatrice qui lui correspond. Nous pouvons considérer ici que l'enseignante est habituée à un certain vocabulaire. L'opportunité qu'elle a saisie montre que son vocabulaire n'est pas exactement celui du manuel, celui-ci précise « la touche sinus ». Elle montre que ce sont ses connaissances qui se sont exprimées car les élèves ne connaissent pas les fonctions trigonométriques. Cette opportunité montre aussi que certaines connaissances liées à cette "habitude" sont disponibles pour l'enseignante qui s'attache à utiliser et faire utiliser aux élèves un vocabulaire précis.

### 3.1.2- Le thème des propriétés

Le chapitre du manuel est organisé de sorte qu'un élève effectuant les activités soit conduit à l'aide du cours à certains résultats y figurant. Certaines questions permettent d'établir les propriétés du titre 3 du cours restreintes au triangle rectangle. Elles sont initiées par des calculs dont il faut extraire des conjectures. L'enseignante entraîne les élèves à établir l'une de ces propriétés mais de façon totalement différente.

Nous reproduisons ci-dessous les parties des activités 1 et 3 du manuel et nous reproduisons un extrait du cours de l'enseignante.

Activité 1 : la deuxième moitié est réservée à l'exploitation des résultats dressés dans un tableau et obtenus « par mesures » sur le papier et par calculs à la calculatrice. Nous trouvons les questions suivantes :

> 4) Comment varie le cosinus d'un angle ? Admet-il une valeur maximale ? une valeur minimale ?
> mêmes questions pour le sinus et la tangente.
>
> 5) Y a-t-il proportionnalité entre :
> • le cosinus d'un angle et sa mesure ?
> • le sinus d'un angle et sa mesure ?
> • la tangente d'un angle et sa mesure ?

L'activité 3 porte comme titre « à la découverte de propriétés », son contenu est le suivant :

> **1)** Dans chacun des cas de l'activité 2 :
> **a)** comparer $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ et $\tan\hat{B}$,
> **b)** calculer l'expression $\cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B}$ .
> **2)** que remarque-t-on ? Le démontrer dans le cas général en considérant un triangle ABC rectangle en A.

L'enseignante rappelle le cours de l'année passée et note que le cosinus avait été introduit comme rapport de projections orthogonales, qu'il prenait des valeurs comprises entre zéro et un et que c'était un nombre sans unité.

> « P- alors est-ce que vous vous rappelez, le cosinus était compris entre quel nombre et quel nombre ?
> « E- 1 et 9
> « E- 1 et 10
> « P- alors déjà c'est un nombre de quel signe ?
> « E- positif
> « P- positif puisqu'on a dit que c'était le rapport de deux longueurs d'accord. Et sinon, il doit être plus petit que quoi ? Est-ce que vous vous souvenez de ça ?
> « E- D'AB (inaudible)
> « P- plus petit que quel nombre ?
> « E- que 1
> « P- plus petit que 1 pourquoi ? Si vous regardez le rapport là
> « E- parce que l'hypoténuse est le côté le plus grand
> « P- oui l'hypoténuse est le côté le plus grand et quand on fait le rapport, on s'aperçoit
> « E- ben que l'hypoténuse c'est le dénominateur
> « P- eh oui, si vous regardez bien peu importe la valeur de AB et de BC c'est pareil pour n'importe quel triangle rectangle. Vous savez que BC c'est l'hypoténuse, c'est le côté le plus grand. AB divisé par BC, AB il est plus petit que BC d'accord et quand on divise un nombre par un nombre plus grand le résultat est toujours inférieur

« E- à un
« P- oui

Nous relevons ici une ressemblance entre la question 4 de l'activité 1 et le rappel de l'enseignante. Ce que le manuel fait remarquer sur les valeurs prises par les fonctions cosinus, sinus et tangente est en partie noté par l'enseignante cependant, cette conclusion n'est pas établie de la même manière. Le manuel utilise un tableau de valeurs afin d'en tirer des constats, l'enseignante utilise l'expression du cosinus dans le triangle rectangle ABC pour faire remarquer que ses valeurs sont inférieures à 1.

« P - si vous regardez le rapport là
« E - parce que l'hypoténuse est le côté le plus grand
« P - oui l'hypoténuse est le côté le plus grand et quand on fait le rapport on s'aperçoit
« E - ben que l'hypoténuse c'est le dénominateur
« P - eh oui ».

Un point inhérent à la situation est donc commun au cours de l'enseignante et au manuel mais il n'est pas traité de la même façon.

La cinquième question de l'activité 1 portant sur la proportionnalité entre les valeurs des rapports cosinus, sinus, tangente et les mesures des angles n'est pas abordée par l'enseignante.

Nous pouvons noter un élément qui n'apparaît ni dans le manuel, ni dans le cours de l'enseignante : pourquoi l'hypoténuse est le plus grand côté ? Au début du cours (cf. passage 2 des analyses de passages décontextualisés) l'enseignante a rappelé les définitions sans aborder cette question. Ensuite, dans l'extrait ci-dessous où elle rappelle une propriété de cosinus relative au triangle rectangle (« cosinus est compris entre 0 et 1 ») en utilisant ce résultat, nous ne constatons pas de propos abordant la question. De même, le chapitre du manuel n'y fait pas allusion. Enfin, ni l'enseignante ni le manuel ne font état d'un futur où ce point sera étudié. Nous trouvons ici une démarche semblable entre l'enseignante et le manuel portant sur la rigueur des propos tenus.

### 3.1.3- Conclusion

Ces deux thèmes nous montrent que si l'enseignante s'inspire du manuel, ce n'est que de façon sommaire. Les activités ne sont pas reprises, la calculatrice est utilisée différemment et certaines propriétés abordées sous forme de rappel sont justifiées par l'écriture des formules correspondantes et non par des valeurs obtenues par calcul.

D'autres éléments du discours nous permettent d'affirmer que le cours de l'enseignante n'est pas restreint au strict contenu du manuel. En effet, nous constatons la présence de commentaires spécifiques, de remarques et de justifications non explicitement abordés par le manuel. Les commentaires consistent en des précisions qui permettent de rappeler ou d'indiquer les domaines de validité de ce qui est utilisé.

Nous relevons :

- une précision sur la trigonométrie ; « que dans le triangle rectangle, surtout pas équilatéral »,
- une précision sur la "position" du triangle dessiner sur une feuille quadrillée ; « habituez-vous à faire des triangles qui ne suivent pas les carreaux les lignes hein... ».

Cette dernière intervention est extraite du passage 9 des passages décontextualisés que nous avons commentés. Nous remarquions que les connaissances propres de l'enseignante lui étaient disponibles en constatant l'effet produit dans le discours : une conséquence était qu'à l'aide de son discours, l'enseignante pouvait conduire les élèves à mobiliser leurs connaissances afin de reconnaître des propriétés mathématiques relatives aux situations qu'ils traitent.

Nous relevons également :

- des précisions de notation ; « comment note-t-on l'inverse ? »,
- une précision de vocabulaire ; « fonction réciproque ou contraire, pas inverse ».

Ces deux dernières interventions sont extraites des passages décontextualisés 7 et 10. Nous notions une attention apportée à la terminologie des élèves qui traduisait une référence à différents cadres. Cette attention de l'enseignante montrait une relative disponibilité de ses connaissances de niveau (n) et au-delà.

Nous relevons des remarques particulières :

- à propos d'un angle dans un triangle rectangle ; il y a « deux côtés qui touchent au départ »,

- à propos de la relativité du vocabulaire employé ; « alors le côté adjacent il change selon l'angle »,

- à propos des « angles complémentaires » dont les valeurs de cosinus et sinus sont égales.

Les commentaires des passages décontextualisés 2, 4 et 7 d'où sont extraites ces phrases nous ont conduit à conclure que l'enseignante adaptait son discours aux situations que la classe rencontrait et qu'elle utilisait implicitement des connaissances liées à celles mises en jeu dans ces situations. Une autre partie de nos conclusion était qu'elle ne dévoilait pas ses attentes ce qui évite toute négociation "à la baisse" d'exigence de ce que les élèves ont à construire.

Enfin, nous relevons des justifications :

- la fonction cosinus prend des valeurs inférieures à 1 parce qu'elle est le rapport de deux mesures dont l'une est inférieure à l'autre.

Et nous relevons que cosinus est une fonction qui prend des valeurs sans unité car « c'est un rapport de longueurs ». La notion d'unité n'apparaît pas dans le manuel. Son indication par l'enseignante permet d'attirer l'attention des élèves sur des erreurs possibles. En effet un élève peut penser que, étant définis à l'aide de longueurs, les rapports trigonométriques ont des unités similaires à celles des longueurs. Nous pouvons peut-être voir dans cette indication un début de décontextualisation de cosinus, sinus et tangente qui seront étudiés indépendamment du triangle dans les classes suivantes.

Le manuel n'explicite aucun des apports que nous avons indiqués ci-dessus. Ils représentent donc le résultat des connaissances propres de l'enseignante et montrent une disponibilité de ses connaissances dont certaines de niveau (n+p). Concernant les éléments que les élèves ont à connaître – définition de cosinus, sinus, tangente, les propriétés à retenir – nous avons constaté que même s'ils sont les mêmes pour l'enseignante et dans le manuel – ce qui est normal, les commentaires à leurs propos et leur introduction ne sont pas les mêmes. Ces éléments nous permettent de dire que l'enseignante puise dans ses connaissances pour préparer et exposer son cours.

### *3.2- Comparaisons indirectes*

## 3.2.1- Des mises en relation

En différents endroits du discours, nous avons remarqué des propos fortement liés entre eux mais que l'enseignante n'a pas mis en relation. Les éventuelles mises en relations que nous indiquons plus loin (cf. 1a et 1b) reposent en partie sur des aspects implicites des contenus abordés. De la sorte, nous constatons différents moyens utilisés par l'enseignante pour que les élèves approchent les contenus implicites. La convergence vers les contenus implicites des différents moyens utilisés peut correspondre à une mise en évidence de ces contenus. Elle révèle une attention particulière portée par l'enseignante à ces contenus.

Certains propos que l'enseignante explicite ne sont pas abordés dans le manuel, leur présence dans le discours témoigne ainsi d'une mise en jeu des connaissances propres de l'enseignante.

*Première mise en relation*

Au début du cours et à l'aide d'une mise en garde, l'enseignante rappelle que la trigonométrie a déjà été vue dans le triangle rectangle et qu'elle ne sera vue que dans le triangle rectangle.

> « donc de la trigonométrie on en a déjà fait dans le triangle rectangle et la trigonométrie cette année on la verra que dans le triangle rectangle, surtout pas équilatéral. »

Nous estimons pouvoir affirmer qu'auprès des élèves de Troisième, le triangle rectangle diffère des autres triangles particuliers par l'angle droit qu'il définit. Accentuer l'importance de ce triangle particulier correspond à mettre implicitement en évidence l'angle droit.

Après avoir donné les définitions des cosinus, sinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle à l'aide des différents côtés du triangle, l'enseignante entraîne les élèves à se souvenir de l'introduction qui avait été faite l'année passée pour le cosinus. Cette introduction avait nécessité l'emploi de projections orthogonales, elle constituait le passage n°6 des passages décontextualisés.

« P - comment est ce qu'on avait introduit le cosinus, on avait parlé de quoi ? Est ce que je vous avais donné la définition comme ça : côté adjacent sur l'hypoténuse ?

« E - on avait fait l'application, on avait fait une activité avant

« P - Oui c'était sur quoi ? Oui d'accord une photocopie d'accord qui parlait de quoi ?

« E - y avait des triangles rectangles

« P - y avait des triangles rectangles mais au départ on avait pas de triangle rectangle, je vous avais demandé de faire

« E - Ah oui avec les projections

« P - Les projections, c'était des projections comment ?

« E - orthogonales

« P - orthogonales et on avait vu que le cosinus d'un angle, c'était le rapport de projections

« E - orthogonales

« P - orthogonales. »

Retenir des projections orthogonales permet de définir implicitement des angles droits, insister sur le caractère "orthogonal" des projections permet d'insister sur les angles droits.

Un commentaire pourrait conduire l'enseignante à mettre en relation ce passage et la mise en garde du début du cours, la relation s'établirait à l'aide de l'angle droit souligné en ces deux lieux.

Notre analyse de ce même passage décontextualisé n°6 (cf. les passages décontextualisés) faisait apparaître un lien implicite entre les rapports trigonométriques exprimés dans le triangle rectangle et les fonctions. Le lien reposait sur les multiples représentations possibles d'un angle, représentations dont ne dépendent pas les rapports trigonométriques tout comme les fonctions. Cela nous conduit maintenant à souligner une correspondance entre ce passage et les remarques de l'enseignante portant sur les termes « fonction contraire », « réciproque » et « inverse », remarques encadrées dans l'extrait ci-dessous. En effet, nous avions noté que ce vocabulaire spécifiait l'appartenance de « sinus » aux fonctions : la calculatrice entraînait l'enseignante à esquisser le thème des fonctions (cf. le thème de la calculatrice).

« P- (...) le sinus de l'angle DEA c'est deux tiers. Est-ce qu'on va pouvoir maintenant trouver l'angle DEA ?
« E- oui
« P- qu'est-ce qu'il nous faut ?
(inaudible)
« P- la calculatrice oui déjà. Alors la calculatrice, qu'est-ce qu'on va devoir taper pour obtenir l'angle DEA ?
« E- faut faire l'inverse

« E- l'inverse
« P- oui Julie
« E- l'inverse de sinus puis après
« P- alors est-ce qu'on commence par écrire l'inverse de sinus puis ?
« E- ça dépend des calculatrices
« P- eh oui, ça dépend des calculatrices, pour certaines calculatrices il faut d'abord écrire la fonction qu'on utilise… »
(…)
« P- sinus moins un, c'est-à-dire qu'on fait ?

« P- le contraire d'accord c'est la fonction contraire. La fonction on appelle ça la fonction ?
« E- inverse
« P- pas inverse parce qu'en fait l'inverse on le réserve plutôt à un sur quelque chose. On dit que c'est la fonction « réciproque ou contraire. »

Par ailleurs, nous avions noté l'introduction de « sinus », « cosinus » et tangente » effectuée à l'aide de la calculatrice en début de cours. On peut ne tenir compte ni des longueurs des côtés des triangles rectangles ni des projections orthogonales pour obtenir la valeur du cosinus d'un angle à l'aide d'une calculatrice. La calculatrice peut sembler détachée des triangles rectangles ainsi que des projections orthogonales tout en étant impliquée dans les calculs trigonométriques. De même que les rapports trigonométriques ne dépendent pas des représentants choisis pour les angles, les réponses que donne la calculatrice n'en dépendent pas non plus.
Trois éléments de l'univers mathématique des élèves contribuent à éclairer le cosinus : le triangle rectangle, les projections orthogonales et la calculatrice. Chacun peut être considéré isolément ou en association avec un autre, ils ont été abordés en différents lieux du discours. Au-delà des calculs trigonométriques, ces différents points peuvent être reliés entre eux à l'aide de l'aspect « fonction » que nous avons pu discerner dans le discours de l'enseignante.

Finalement, les éléments introduits par l'enseignante permettent "facilement" une présentation de « cosinus » différente de celle du manuel et permettent d'éclairer des implicites non explicités dans le manuel.
Nous constatons des connaissances sur les fonctions qui apparaissent sous différentes formes dès que l'occasion se présente.

*Deuxième mise en relation*

La deuxième mise en relation nous est inspirée par les propos suivants :

au début du cours,

> « P - donc dans un triangle rectangle finalement, le côté ici le côté opposé à l'angle B, c'est la même chose que le côté adjacent à l'angle C et le côté adjacent à l'angle B c'est la même chose que
> « E - le côté opposé à l'angle C
> « P - voilà »

puis, après avoir fait écrire les définitions de cosinus, sinus et tangente pour un triangle ABC rectangle en A,

> « Alors qu'est ce que vous remarquez entre ce qu'on a écrit avec l'angle B et sur ce qu'on est en train d'écrire avec l'angle C ? le cosinus de l'angle B, le sinus de l'angle B, la tangente de l'angle B et puis en dessous le cosinus de C, le sinus de C et la tangente de C, qu'est ce qu'on remarque ? »
> « l'hypoténuse ne change pas »

qui se conclut par,

> « Si vous regardez ça et que vous regardez ça ben c'est la même chose et ici aussi d'accord ? Donc dans un triangle « rectangle, le cosinus d'un angle c'est le sinus de l'un autre hein ? »
> « donc le cosinus d'un angle c'est le sinus de l'autre et le sinus d'un angle c'est le cosinus de l'autre. »

Les définitions de cosinus, sinus et tangente ont été exposées au moyen de formules générales où les différents côtés d'un triangle rectangle étaient désignés par : côté opposé, côté adjacent et hypoténuse. Pour le triangle ABC rectangle en A dont il est question dans les trois extraits, la contextualisation des définitions conduit à :

$$\cos B = \frac{AB}{CB},\ \sin B = \frac{AC}{CB},\ \tan B = \frac{AC}{AB}\ \text{et}\ \cos C = \frac{AC}{CB},\ \sin C = \frac{AB}{CB}\ \text{enfin}\ \tan C = \frac{AB}{AC}.$$

L'enseignante fait observer l'égalité entre cosB et sinC d'une part et entre cosC et sinB d'autre part. La présentation des définitions et les remarques du début du cours permettaient aux élèves de disposer d'éléments suffisants pour vérifier ces égalités :

cos B = côté adjacent à B/hypoténuse , puisque « côté adjacent à B est la même chose que côté opposé à C » et que « hypoténuse ne change pas » alors cos B = côté opposé à C/hypoténuse qui est la définition de sin C, soit cos B = sin C.

Nous constatons que l'enseignante apporte aux élèves les éléments nécessaires à la construction de leurs connaissances mais ne les relie pas toujours entre eux. Ces éléments ne figurent pas tous dans le texte du manuel.

L'enseignante délaisse le contenu du manuel, présente un cours riche en connaissances pour les élèves mais n'entraîne pas toujours les élèves à exploiter toutes les possibilités que cet exposé offre.

### 3.2.2- La coexistence de deux cadres

Deux cadres se dessinent dans le discours de l'enseignante, le cadre arithmétique et le cadre algébrique, le second est plus marqué que le premier. Ils ne se mélangent pas mais ne sont pas hors propos. Le cadre arithmétique apparaît lorsque l'enseignante parle des « formules » cosinus, sinus et tangente : « on va essayer d'appliquer ces formules, ces définitions au triangle ABC ». La notion de formule peut souvent être associée (dans les classes antérieures à la classe de Troisième) à un ensemble d'opérations à effectuer sur des nombres "simples" (entiers, décimaux) pour obtenir un résultat. Avec la désignation des opérations, le cadre arithmétique est très proche. Il disparaît lorsque nous considérons les nombres réels notamment irrationnels que les élèves de Troisième manipulent. Il peut réapparaître alors que la classe rappelle pourquoi « cosinus est un nombre de signe positif, plus petit que 1 » en précisant qu'il est le résultat d'un rapport, d'une division « si vous regardez le rapport-là » « quand on divise... ». Il disparaît avec le terme « rapport » et le signe « positif ». Le cadre algébrique apparaît complètement lorsque la calculatrice intervient et que l'enseignante utilise les mots « fonction » et « fonction réciproque ». Tout se passe comme si la calculatrice entraînait l'enseignante à rétablir un cadre plus général pour cosinus, sinus et tangente, c'est-à-dire à mettre en œuvre ses connaissances de niveau (n+p).

Par rapport au texte du manuel, les points 1 et 2 abordés ci-dessus mettent en évidence que le discours présente une portée mathématique qui s'étend bien au-delà du texte. Des connaissances mathématiques de niveau (n+p) sont mises en œuvre en classe par l'enseignante, indépendamment du texte du manuel et "résistent" à celles de niveau (n) que les élèves ont à acquérir.

### 3.2.3- Un élément important esquissé par le manuel

La dernière question de la deuxième activité du manuel porte sur une éventuelle proportionnalité entre les mesures des angles et les valeurs des cosinus, sinus et tangente de ces mesures.

5) Y a-t-il proportionnalité entre :
- le cosinus d'un angle et sa mesure ?
- le sinus d'un angle et sa mesure ?
- la tangente d'un angle et sa mesure ?

Cette question peut conduire les élèves à remarquer que cosinus, sinus et tangente ne sont pas des nombres mais bien des relations entre des mesures d'angles et des nombres. Ainsi, $(\cos\alpha = a)$ ne veut pas dire $(\alpha = \frac{a}{\cos})$ c'est-à-dire croire que « cosinus » est un nombre et $(\cos 2\alpha = a)$ ne veut pas dire $(\cos\alpha = \frac{a}{2})$. Une première approche des fonctions trigonométriques de même qu'un premier éclairage sur des erreurs classiques peuvent ainsi être effectués.

Plusieurs lieux du cours de l'enseignante pourraient approcher ces mises en garde :

- le rappel des projections orthogonales,
- la notion de fonction réciproque à utiliser pour obtenir une valeur d'angle alors que son sinus est connu.

### 3.2.4- L'enseignante face aux propos des élèves

Nous avons relevé trois passages pour alimenter un autre aspect de la comparaison du discours de l'enseignante au texte du manuel. Nous allons illustrer la réaction de l'enseignante face aux propos des élèves : les adopte-t-elle, s'adapte-t-elle, privilégie-t-elle le vocabulaire du manuel ?

La réponse est la suivante: l'enseignante s'adapte à la classe ; elle accepte et intègre dans le cours certains propos des élèves.

Trois passages nous ont permis ce constat.

*premier passage*

« P- Alors comment s'appelle le côté BC ?
« E- l'hypoténuse
« P- l'hypoténuse parce que c'est le côté
« E- le plus long
« P- le plus long c'est vrai, c'est la plus grande longueur et opposé
« E- à l'angle droit
« P- à l'angle droit donc BC c'est l'hypoténuse, toujours le plus grand côté. »

L'élément caractéristique de ce passage est l'expression « le côté le plus long » utilisée par un élève et admise par l'enseignante, elle la reprend en complétant la caractérisation de l'hypoténuse avec l'angle droit. La conclusion de l'enseignante est composée de deux parties, la première fait apparaître l'angle droit et la deuxième la longueur du côté. Evidemment, les deux ne sont pas équivalentes : le plus grand côté d'un triangle n'est pas l'hypoténuse si le triangle n'est pas rectangle. La présence soulignée de « l'angle droit » évite ce questionnement. Cependant nous constatons que la conclusion de l'enseignante tient compte des propos des élèves.

*second passage*

« P- Alors une fois qu'on a cet angle là, est ce qu'on peut connaître d'autres choses dans le triangle... qui nous manquent, qu'est ce qu'on pourrait calculer dans ce triangle-là ?
« E- ben le côté (inaudible)
« P- Cécile ?
« E- L'angle D
« P- l'angle ?
« E- D
« P- l'angle D. Là oui comment est ce qu'on pourrait le trouver cet angle ?
« (...)
« E- dans un triangle la somme des angles est égale à 180, on peut faire
« P- 90 moins 42 degrés
« E- ah ouais
« P- on fait 90 moins 42, on trouve D oui. Alors ça c'est la méthode la plus simple c'est bien, c'est la plus rapide aussi. Puisqu'on sait bien, on l'a appris en... y'a quelques années, que dans un triangle la somme des angles fait 180. On connaît l'angle A qui fait 90, on connaît l'angle E qui fait 42 donc le dernier fera
« E- 48

L'élément caractéristique de ce passage est la méthode acceptée et retenue par l'enseignante pour calculer le troisième angle du triangle en utilisant la somme des angles d'un triangle : on pouvait s'attendre à ce qu'elle demande l'utilisation d'une fonction trigonométrique.

*troisième passage*

« P- (...) Est ce qu'on peut connaître autre chose encore dans ce triangle ?
« E- AE
« P- AE ? En faisant comment ?
« (...)
« E- Pythagore
« P- Pythagore c'est vrai. Qu'est-ce qu'on pourrait utiliser encore ? Oui ?
« E- côté adjacent sur côté opposé
« P- alors côté adjacent sur côté opposé mais pour ça, il faudrait parler de quel angle ?
« E- E euh non A
« P- il faudrait parler de quoi sinus, de cosinus, de tangente de quoi?
« E- non euh / côté opposé sur côté adjacent / la tangente de l'angle D
« P- la tangente de l'angle D.
« (...)
« P- D'accord est ce qu'y a un autre moyen de connaître AE ? On a parlé de la tangente de l'angle D est ce qu'on ne peut pas utiliser d'autres outils de trigonométrie là ?
« E - côté opposé sur côté (inaudible)
« P- on connaît les deux angles, ça doit pas être bien compliqué. Le cosinus de quel angle ?
« (...) »

Ce passage suit directement le précédent, DE est connue, le calcul de la distance AE est ce qui a retenu notre attention. Pour ce calcul, les élèves proposent d'appliquer le théorème de Pythagore, l'enseignante leur précise que le théorème peut être utilisé mais spécifie son attente en les orientant vers les « outils de trigonométrie ».

Nous estimons que ces trois passages montrent que l'enseignante est à l'écoute des élèves, elle s'adapte rapidement à leurs propos et en intègre certains dans le cours. Elle ne demande pas toujours aux élèves de dire ce que, probablement, elle attendait. Elle tient compte de leurs propos et les utilise sans perte d'exigence. Le troisième passage montre aussi qu'elle leur demande d'aller au-delà de leurs anciennes connaissances et n'adopte pas toujours ce qu'ils proposent. Nous concluons ici que l'enseignante n'est pas contrainte par un texte de préparation, elle peut modifier et adapter ses attentes. En institutionnalisant certains propos d'élèves (qui ne figurent pas dans le manuel) elle montre qu'elle ne s'astreint pas à suivre le texte du manuel.

## 4- Conclusion de la comparaison du discours de E2 et du texte du manuel

L'objectif de l'enseignant n'est pas de distinguer fondamentalement son cours du contenu du manuel. Nous savons bien que les définitions et propriétés à connaître pour les élèves d'une classe donnée ne peuvent pas varier d'un enseignant à l'autre, d'un manuel à l'autre, d'un enseignant à un manuel. Cependant, des éléments de connaissance peuvent être présentés de manière assez différente. Nous avons relevé la présence de certaines connaissances de l'enseignante. Nous avons noté un certain nombre de remarques sur ce qu'elle exposait durant son cours et dont l'une a abouti à une propriété du « cosinus ». Ces éléments ne figurent pas dans le manuel. Notre comparaison nous a montré qu'une grande partie du « cours » du manuel apparaissait dans celui de l'enseignante mais que les activités étaient totalement laissées de côté, c'est-à-dire qu'une grande partie du chapitre du manuel était absente du cours de l'enseignante.
La structure du chapitre permet difficilement d'abandonner la partie « activités » et de ne retenir que la partie « cours ». Pour un enseignant qui suivrait le texte du manuel, deux situations pourraient se produire :

- la partie « activités » serait remplacée par une autre qui jouerait le même rôle,
- aucune partie « activités » ne serait proposée, les résultats seraient donnés "de façon théorique" et illustrés par des exemples les précédant ou les suivant, ces résultats pouvant être démontrés ou non.

L'enseignante observée n'adopte aucune de ces deux attitudes. Son cours est "plus riche" que celui du manuel, des éléments essentiels à connaître sont communs au manuel et au cours de l'enseignante.
Finalement, tout se passe comme si ses connaissances et le manuel étaient des éléments aidant l'enseignante à la préparation de son cours. Le manuel apparaît ainsi comme un document qui donne les "grandes directions" du cours.
Nous avons aussi remarqué l'adaptation de l'enseignante aux élèves, elle reconnaît ce qui est juste dans leurs propos et les entraîne à aller au-delà de leurs anciennes connaissances. Cette attitude nous conduit en particulier à noter que son discours n'est pas restreint à un texte qui serait celui de sa préparation du cours.
Le vocabulaire employé est parfois très général : quand l'enseignante parle de « cosinus », « sinus » ou « tangente » s'agit-il des fonctions restreintes au triangle rectangle ou bien de nombres qui s'appellent ainsi dans le triangle rectangle ? Son vocabulaire laisse entendre les

deux appartenances. Pour les élèves, la première éventualité est à exclure puisqu'ils sont en classe de Troisième et que les « fonctions trigonométriques » ne sont pas au programme. Il est fort probable qu'ils n'aient pas relevé la nuance, il est aussi probable que la distinction non marquée n'ait pas de conséquences sur leurs connaissances.

## *C- Comparaison du discours de l'enseignante E3 au texte du manuel*

Nous comparons le discours de l'enseignante E3 au texte du manuel utilisé par la classe « Math 3° BELIN Edition 1993 ». La comparaison est constituée de quatre paragraphes dont le premier est réservé à une présentation du texte du manuel et de l'exposé de l'enseignante. La comparaison globale des deux documents se fera à l'aide de quatre tableaux dans le second paragraphe. Le paragraphe 3 est destiné aux comparaisons locales, enfin la conclusion occupera le quatrième paragraphe.

### 1- Présentation de l'exposé de l'enseignante et du manuel

#### *1.1- Le manuel*

Le contenu des chapitres du manuel est distribué en plusieurs parties : « Activités préparatoires », « l'essentiel », « savoir faire », « les exercices ». Les auteurs du manuel indiquent en préface que « les activités (préparatoires) permettent de découvrir les notions essentielles du chapitre », ils précisent que ces activités préparatoires sont en général indépendantes : « progressives et indépendantes ». La deuxième partie « l'essentiel » donne des indications à propos des connaissances que doivent avoir les élèves en fin de classe de troisième, les auteurs la présentent ainsi : « cette rubrique résume clairement, dans des encadrés, les résultats fondamentaux, les définitions ou les propriétés qu'il faut retenir... ». Enfin, la troisième partie « savoir faire » expose « les situations classiques auxquelles sera confronté l'élève... ». Nous estimons que la première partie peut être vue comme un rappel de certaines connaissances nécessaires aux élèves et une introduction à de nouvelles connaissances qui peuvent être reprises en partie ou en totalité dans la seconde partie. De même nous estimons que la troisième partie peut être vue comme un point d'ordre méthodologique explicitant, sous forme de commentaires,

des étapes qui permettront aux élèves de répondre à certaines questions. Ces étapes reposent en général sur la mise en oeuvre de connaissances de niveau (n) abordées par la seconde partie.
Nous constatons que les éléments abordés par la partie « activités préparatoires » sont repris parfois directement, parfois indirectement par la partie « l'essentiel ». De même, par rapport à la partie « l'essentiel » la partie « savoir faire » n'apporte pas d'éléments supplémentaires, à connaître en fin de Troisième.

### *I.2- L'exposé de l'enseignante*

Nous pouvons partager la séance enregistrée en deux parties. La première partie est réservée aux corrections d'exercices que l'enseignante avait donnés aux élèves comme travail à la maison. Le premier exercice a déjà été corrigé lors d'une précédente séance, nous assistons à la suite.
Les exercices sont tous extraits de la partie « exercices » du manuel, il s'agit des numéros 12, 14, 16 et 18 des pages 60 et 61 du chapitre 3 « Equations - inéquations à une inconnue ».
Les énoncés des exercices 14, 16 et 18 sont les suivants :

n°14

Résoudre les équations :

a. $(x-\sqrt{2})(\frac{2}{3}x-1)=0$

b. $(x-\frac{3}{2})(\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4})(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x)=0$

c. $(4\sqrt{2}-x)(\frac{5}{3}x-1+\sqrt{2})=0$

d. $(2x+\frac{3}{4})(\frac{3}{5}x-\frac{4}{7})(\frac{3}{4}x-4)=0$

n°16

Résoudre les équations :

a. $(2x-5)(4x-3)=10-4x$.

b. $(5x-3)^2=4$.

c. $9(3x-1)^2=16$.

N°18

Résoudre les équations :

a. $x^2=4$ ; $x^2=49$ ; $x^2=5$.

b. $2x^2-3=0$ ; $7x^2=14$ ; $-3x^2+18=0$.

c. $x^2=-5$ ; $2x^2+5=0$ ; $-4x^2-16=0$.

La deuxième partie de la séance porte sur des propriétés des inéquations.

## 2- Comparaison globale

Nous allons procéder à la comparaison en deux parties, la première sera réservée à la première partie de la séance, la deuxième sera réservée à la deuxième partie de la séance. Les deux parties présenteront, à l'aide de tableaux, une vision globale de ce qui est exposé par l'enseignante et par le texte du manuel.

### *2.1- Première partie de la séance*

La comparaison globale est constituée de trois tableaux qui résument la première partie de la séance où la classe corrige 3 exercices de résolution d'équation. Cette partie correspond à la première partie du chapitre du manuel dont l'objectif est d'entraîner les élèves à la résolution d'équations à une inconnue.

#### 2.1.1- Présentation des tableaux

*Les colonnes des tableaux*

Nous indiquons dans la première colonne des tableaux le texte du manuel en omettant les exemples car ils ne sont pas repris par l'enseignante. Les colonnes suivantes sont réservées au discours de l'enseignante. Nous avons prévu une colonne par équation en cours de résolution et sujette à discussion entre les élèves et l'enseignante, ou encore sujette à commentaire particulier pouvant être comparé au texte du manuel.

*Les lignes des tableaux*

Nous avons prévu deux ou trois lignes par tableau. La première ligne indique le numéro de l'exercice en cours de résolution puis l'équation précise sur laquelle portent les interventions que nous avons extraites. La deuxième ligne indique le contenu du manuel et les interventions de l'enseignante. La troisième présente aussi quelques interventions de l'enseignante.

La deuxième ligne précise les éléments sur lesquels porteront nos comparaisons. Si les mots de l'enseignante sont exactement ceux du manuel, nous disposerons les interventions de l'enseignante au même niveau que le texte du manuel. Si certains mots de l'enseignante sont aussi dans le manuel mais ne sont pas employés de la même manière, nous disposerons le texte du manuel et les interventions de l'enseignante sur des niveaux décalés avec quelques lignes en commun. Enfin, si le discours de l'enseignante est tenu en des termes totalement distincts de ceux du manuel mais que cependant, nous pouvons établir une comparaison, nous disposerons le texte du manuel et les interventions de l'enseignante sur des niveaux totalement décalés. La troisième ligne est composée d'interventions dont le contenu ne peut pas directement être mis en relation avec le texte du manuel. Seul le dernier tableau présente une troisième ligne.

### 2.1.2- Les tableaux

**Tableau 1**

| Texte du manuel | discours de l'enseignante |
|---|---|
| | exercice n°14<br><br>résolution de l'équation<br>$-2\sqrt{2}/3x = -1$<br>issue du troisième facteur de<br>$(x - 3/2)(3/2x - \sqrt{3}/4)(1-2\sqrt{2}/3x) = 0$ |
| **1. Equations**<br>a. Propriétés de l'égalité<br><br>1 Pour tous les nombres a, b, c :<br>si $a = b$ alors $a + c = b + c$ ;<br>si $a + c = b + c$ alors $a = b$.<br><br>2. Pour tous les nombres a, b, c avec $c \neq 0$ :<br>si $a = b$ alors $ac = bc$ ;<br>si $ac = bc$ alors $a = b$<br><br>b. conséquences<br><br>1. si on ajoute ou si on soustrait un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première.<br>2. si on multiplie ou si on divise un même nombre non nul aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première. | « Tu l'passes pas là tu divises.<br>Ça c'est une équation de la forme $ax = b$ donc la solution c'est x égal b sur a ». |

**Tableau 2**

| Manuel | Enseignante | | |
|---|---|---|---|
| | Exercice n°16<br>résolution de l'équation<br>$9(3x - 1)^2 = 16$ | Exercice n°18.b<br>résolution de l'équation<br>$x^2 = 4$ | Exercice n°16.a<br>résolution de l'équation<br>$(2x - 5)(4x - 3) = 10 - 4x$ |
| **2. Equation-produit**<br>a. définition<br>Propriété<br><br>Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors le produit est nul.<br>b. Cas particulier<br><br>Certaines équations dont l'écriture développée et simplifiée contient des termes où l'inconnue a un exposant supérieur ou égal à 2, peuvent être transformées en équations-produit, en transposant tous les termes dans un membre et en factorisant. | «P- bon qu'est ce qu'on remarque ? (...)<br>C'est ? (...) 3 fois 3 donc c'est trois au carré. Comment on peut réécrire tout ce terme là ? C'est trois facteur de trois x moins un au carré $[3(3x - 1)]^2$. Qu'est ce qu'on va faire maintenant?<br>E- Passer le quatre de l'autre côté. » | « n'oublie pas hein alors avec ce qu'on a vu hier hein, $x^2 - 4$, $x^2 - 2^2$. Egalité remarquable : $(x - 2)(x + 2)$ d'accord » | « Alexandre, ta factorisation tu t'es trompé dans un signe (...) là c'est plus puisqu'on a transposé » |

**Tableau 3**

| **Manuel** | **Enseignante** | |
|---|---|---|
| | Exercice n°18.b<br>résolution de l'équation<br>$-3x^2 + 18 = 0$ | Exercice n°18.c<br>résolution de l'équation<br>$4x^2 + 16 = 0$ |
| **2. Equation-produit**<br>a. définition<br>Propriété<br><br>Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors le produit est nul.<br>b. Cas particulier<br><br>Certaines équations dont l'écriture développée et simplifiée contient des termes où l'inconnue a un exposant supérieur ou égal à 2, peuvent être transformées en équations-produit, en transposant tous les termes dans un membre et en factorisant. | « il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a faits quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la deuxième solution, alors que quand on fait avec les identités remarquables, les équations-produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord. » | « bon alors soit on les résout avec les identités remarquables comme on a fait hier les équations-produit, là on est capable de le faire puisqu'on en a fait. On a $4x^2 + 16 = 0$, on n'a rien, on n'a aucun moyen à notre disposition pour le mettre sous la forme de produit de facteurs de premier degré d'accord. Bon alors on peut les résoudre avec les racines comme on a fait l'autre fois hein. donc il faudrait, ça voudrait dire qu'on devrait écrire racine de ça ($-4x^2$) égal racine de ça (6). Mais ça t'as pas le droit d'écrire parce que $-4x^2$ c'est un nombre négatif. » |
| **autres points remarquables** | « ça n'a pas beaucoup d'importance, on a quand même la différence de deux carrés même s'ils sont dans le mauvais sens. »<br><br>Les calculs sur les racines | Voir le détail de la comparaison avec le manuel. |

## 2.1.3- Commentaire

Les trois tableaux rapportent le début du cours de l'enseignante où les élèves résolvent des équations à une inconnue. Après transformation au moyen de factorisation et autres calculs algébriques, des équations du second degré sont rendues équivalentes à des produits nuls de facteurs de degré 1. Chaque équation conduit alors à la résolution de plusieurs équations du premier degré. Il semble que les binômes du second degré n'ayant pas de terme de degré 1 aient été spécifiquement étudiés lors d'une séance précédente à laquelle l'enseignante se réfère : « on a $4x^2 + 16 = 0$ (...) bon on peut les résoudre avec les racines comme on a fait l'autre fois (...) ».

Ainsi, l'enseignante est conduite à distinguer les binômes du second degré de la forme $ax^2 + b$ des polynômes du second degré voire de degré supérieur à 2.

La séance que nous observons pourrait être caractérisée par un titre du style « mise en œuvre de propriétés algébriques pour la résolution d'équation à une inconnue ».

La première colonne des tableaux présente une déclinaison de ce titre. En effet le manuel expose dans cet ordre « propriété de l'égalité », « définition d'une équation produit » puis un « cas particulier » qui précise une démarche à suivre pour les équations contenant « des termes où l'inconnue à un exposant supérieur à ou égal à deux ». Le cas particulier de l'équation $x^2 = a$, binôme de la forme $ax^2 + b$ est traité par le manuel dans un chapitre précédent (chapitre 1 « racine carrée »).

Nous constatons une succession des sujets traités semblable entre l'enseignante et le manuel : résolution d'une équation du second degré ne comportant pas de terme du premier degré puis résolution d'équation de degré supérieur ou égal à deux d'un point de vue général c'est-à-dire y compris le cas particulier précédent.

Nous constatons également deux expressions figurant dans le manuel et utilisées dans le même sens par l'enseignante : « équation-produit » et « transposé ».

Cette première comparaison nous conduit à la conclusion que la forme d'ensemble du manuel est respectée par l'enseignante : exercices extraits du manuel, quelques termes identiques, équations, les binômes du second degré ayant été traités avant ce cours. Mais il semble au niveau du contenu qu'elle n'adopte pas exactement celui du manuel pour les énoncés des propriétés. Certaines références et associations apparaissent alors qu'on ne les trouve pas dans le manuel « c'est une équation de la forme $ax = b$ », « on a quand même la différence de deux carrés même s'ils sont dans le mauvais sens ». L'enseignante semble apporter des commentaires autres que ceux du manuel sur les connaissances de niveau (n) des élèves.

### *2.2- Deuxième partie de la séance*

Nous dressons un tableau qui expose la deuxième partie du cours de l'enseignante réservée aux « inéquations ».

#### 2.2.1- Présentation du tableau

Nous avons choisi de ne pas reproduire dans le tableau le texte du manuel dans son intégralité ni l'ensemble du discours de l'enseignante. Les propos de l'enseignante qui ne sont pas une reproduction exacte du texte du manuel ont orienté notre choix pour la rédaction des deux colonnes du tableau.

*Colonne réservée au manuel*

Le tableau présente les titres exacts du manuel et entre guillemets ("...") une phrase caractérisant le contenu du texte qu'elle remplace.

*Colonne réservée au discours de l'enseignante*

Nous avons sélectionné et retranscrit des éléments du discours de l'enseignante que nous considérons indicateurs du discours tenu aux élèves.

*Disposition des extraits retenus*

Nous avons gardé le principe de disposition adopté lors de la comparaison du discours de la première enseignante au manuel utilisé par sa classe.
Ce principe est le suivant.

- Premier cas : si le discours de l'enseignante est (presque) exactement le texte du manuel, nous l'indiquons en vis-à-vis du texte correspondant du manuel, sur la même ligne du tableau.

- Second cas : si le contenu du discours de l'enseignante et le contenu du texte du manuel portent sur le même sujet (par exemple « résolution d'inéquations du premier degré ») mais que les termes employés ne sont pas les mêmes, nous indiquons les deux contenus sur des niveaux décalés mais avec quelques lignes communes.

- Troisième cas : si aucun de ces deux cas n'est identifiable ou que nous remarquons une grande différence entre les contenus (fond ou forme), nous réservons des lignes séparées pour chacun des deux textes du manuel et de l'enseignant.

## 2.2.2- Le tableau

| MANUEL (partie "L'essentiel") | ENSEIGNANTE |
|---|---|
| **Inéquations** | bon allez on passe aux inéquations |
| **a. Propriétés des inégalités**<br>**Propriété 1**<br><br>"compatibilité de < avec l'addition"<br>***Exemples***<br><br>**Propriété 2**<br><br>"compatibilité de < avec le produit par un scalaire positif"<br>"non compatibilité de < avec le produit par un scalaire négatif"<br>***Exemples*** | |
| | Alors premièrement petit a on va rappeler les règles d'ordre et d'addition (...) donc si on additionne le même nombre...<br>[...]<br>Par exemple...<br><br>Alors petit b, ordre et multiplication... au lieu d'ajouter aux deux membres de l'inégalité on va multiplier.<br>[...]<br>(...) exemples (suivis d'une démonstration) |
| **b. Conséquences**<br>Pour résoudre une inéquation, on utilise les propriétés suivantes :<br><br>**Propriété 1**<br>"mise en « mots » de la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la soustraction"<br>***Exemple***<br><br>**Propriété 2**<br>"mise en mots de la compatibilité de la relation d'ordre avec le produit par un réel positif puis de la non compatibilité de la relation d'ordre avec le produit par un réel négatif"<br>***Exemple 1***<br>***Exemple 2***<br><br>**Remarques**<br>"solution des inéquations de la forme 0x < a dans les deux cas a < 0 puis a > 0". | On avait donné des règles pour savoir (...) résoudre les inéquations |
| Manuel (partie savoir faire) | |
| **Résoudre un système d'inéquations à une inconnue** | On va juste en résoudre en plus des systèmes d'inéquations à une inconnue. |
| EXEMPLE<br>Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases} -3x-5 \leq 4 \\ 5x-2 < 8 \end{cases}$ | |

### 2.2.3- Commentaire

Nous nous trouvons avec l'enseignante ici observée dans le troisième cas de comparaison que nous avons rappelé ci-dessus : les contenus que l'enseignante expose semblent être énoncés et présentés différemment de ce qu'ils sont dans le manuel.

Nous constatons une structure semblable du cours de l'enseignante et de l'exposé du manuel qui porte sur les propriétés des inégalités inscrites au programme de la classe de Troisième. Ce constat peut être étendu à l'ensemble du chapitre en cours puisque, de même que le texte du manuel expose successivement les éléments de connaissances à acquérir sur les équations puis sur les inéquations (du premier degré à une inconnue), l'enseignante adopte comme découpage "équations" puis "inéquations" (du premier degré à une inconnue).

Au terme de cette très rapide première comparaison tout se passe comme si le manuel présentait une importance pour l'enseignante pour l'enchaînement des principales parties de son cours ainsi que pour son contenu, toutefois le détail du contenu semble être abordé différemment. Nous constatons une relative mise en jeu des connaissances de l'enseignante.

## 3- Comparaisons locales

Suite aux constats (cf. § I présentation) concernant les différentes parties du manuel et suite à la conclusion de la première comparaison du cours de l'enseignante à celui-ci, nous avons décidé de ne comparer le cours de façon plus approfondie qu'à la partie du manuel intitulée « l'essentiel ».

### *3.1- Première partie de la séance : début du cours de l'enseignante*

Dans un premier temps, nous allons aborder les éléments du cours de l'enseignante qui présentent des ressemblances avec certains points du manuel. Dans un second temps, nous aborderons des éléments du discours de l'enseignante qui n'apparaissent pas dans le manuel.

### 3.1.1- Les éléments de ressemblance

Nous avons repéré deux extraits du discours de l'enseignante dont nous estimons pouvoir inférer des éléments de conclusion concernant l'utilisation du manuel et l'utilisation visible de connaissances de niveau (n+p).

#### *3.1.1.1- Premier extrait du cours de l'enseignante que nous comparons au manuel*

Nous procédons en deux étapes. Nous réservons la première à une analyse du discours de l'enseignante, analyse guidée par le texte du manuel. Nous réservons la deuxième étape au texte du manuel.

i- Première étape : le discours

*présentation*

Les échanges que nous reproduisons portent sur une partie de la résolution de l'équation : $[(x - \frac{3}{2})(\frac{3}{2}x - 1)(1 - \frac{2x\sqrt{2}}{3}) = 0]$ que l'élève, chargé de la correction au tableau, a effectué en trois parties. Dans cet extrait, il est question de la troisième partie : les élèves discutent de « $1 - \frac{2x\sqrt{2}}{3} = 0$ », qui a été transformé en « $- \frac{2x\sqrt{2}}{3} = - 1$ ».

*Extrait :*

« E- faut que (bruit) moins ici

1- « P- où c'est qu'il a oublié le moins ?

« E- là j'ai oublié le moins

« E- parce que

2- « P- attends attends on va écouter d'abord ce que dit Guillaume

« E- est ce qu'il y a un moins devant deux racine de deux sur trois ?

3- « P- oui y'a un moins puisque tu as un moins racine de deux sur trois

« E- donc quand on le passe y'a plus le moins

4- « P- attends tu l'passes pas là tu divises, tu l'passes entre guillemets hein, tu divises là... Entre guillemets, tu divises là....c'est une

« E- tu peux pas si tu l'passes

« E- puisque là

5- « P- oui oui non mais non non c'est bon ce que t'as fait attention Guillaume, ça c'est une équation de la forme a x égal b avec a différent de zéro hein donc la solution c'est b sur a d'accord bon tu passes le moins il reste là d'accord

« E- alors je le laisse ?

6- « P- oui oui c'est bon

« E- mais alors y'a le moins

« E- y'a moins moins

7- « P- non c'est pas moins x parce que justement il a divisé directement par moins deux racine de deux sur trois donc c'est pas moins x. En effet si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par deux racine de deux sur trois ce qui revenait au même après puisque tu trouvais moins.... et deux racine de deux sur trois alors la solution donc alors x égal quatre fois quatre demi moins un tiers d'accord... »

Le moins dont parle l'élève et que l'enseignante reprend avec la première phrase « où c'est qu'il a oublié le moins ? » est celui qui précède « $\frac{2x\sqrt{2}}{3}$».

L'extrait fait apparaître une équation « ax = b », qui généralise l'équation « - $\frac{2x\sqrt{2}}{3}$ = -1 » à résoudre. Nous allons donc commenter l'extrait en deux parties : l'équation générale puis l'équation particulière.

*L'équation générale*

Notre commentaire de comparaison commence avec la phrase suivante de l'enseignante : « ça c'est une équation de la forme a x égal b avec a différent de zéro hein » (numérotée 6 dans l'extrait ci-dessus).

Cette phrase laisse apparaître une association entre une équation particulière et une équation générale. L'enseignante associe ainsi l'équation particulière « - $\frac{2x\sqrt{2}}{3}$ = -1 » à l'équation générale « ax = b ». Nous pouvons interpréter cette association comme une explication au problème qu'éprouvent certains élèves avec la présence du signe moins puisque l'équation ax = b ne présente pas explicitement de signe moins et permet (nous pouvons croire "plus facilement") de "voir" l'opération entre a et x. Une autre interprétation serait de "montrer" la valeur de « a » qui est ce qui "reste" du terme en x après "suppression" de x. L'association à l'équation « ax = b » peut permettre de "voir" la valeur de « a ».

La suite de cette association est constituée par la donnée de la solution de l'équation générale associée : « la solution c'est b sur a ».

Nous pourrions attendre comme conclusion un retour vers l'équation particulière c'est-à-dire vers la solution particulière de celle-ci, associée à la solution générale. Ainsi, nous pourrions attendre une suite ayant cette teneur : « donc la solution c'est b sur a d'accord c'est-à-dire « -1 sur - $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ » ; on "voit" « a » avec son signe moins. Or, la deuxième identification, permettant de passer de la solution générale à la solution particulière attendue et objet de problème pour certains élèves, n'est pas explicitement abordée. Un mot « tu passes » et un commentaire « le moins il reste là » peuvent signifier cette identification, « tu passes » remplaçant « sur » de « b sur a » et « le moins il reste là » désignant la "place" du signe moins, c'est-à-dire montrant que le signe moins « reste » avec ce qui est passé, pour indiquer qu'il ne s'agit ni d'une addition ni d'une soustraction mais bien d'un quotient par un scalaire négatif.

Ce passage est le second des passages décontextualisés que nous avons étudiés précédemment. Nous avions alors constaté qu'il y avait un "saut" entre les phrases contextualisées et celles décontextualisées. Nous voyons ici, de façon plus précise, que ce saut est dû aux moyens de résolution que l'enseignante expose pour l'équation « - $\frac{2x\sqrt{2}}{3}$ = -1 ».

Nous avions constaté qu'avec les phrases classées en discours contextualisé, l'enseignante parlait de la division en l'utilisant comme explication, sans en expliciter la raison, tandis qu'avec les phrases classées en discours décontextualisé, l'enseignante utilisait une « forme » d'équation voulant sans doute jouer sur une reconnaissance de modèle appelé « forme » avec les élèves.

Nous constatons maintenant que cette « forme » d'équation permet à l'enseignante d'identifier la situation à laquelle les élèves sont confrontés à une autre qu'ils sont censés connaître (ou reconnaître). Mais cette identification n'est pas menée à terme dans les formes où elle est entamée. Evidemment, la conclusion que l'enseignante donne à l'identification repose sur la division de b par a : « donc la solution c'est b sur a ». La division est d'ailleurs indiquée par le mot « sur » dans la phrase « b sur a ». Le seul lien entre la forme « ax = b » et la solution « x = b/a » est le mot « donc ». Les élèves doivent comprendre que « donc » veut dire « ax sous-entend un produit » pour interpréter la solution. Nous constatons que la raison de la division n'est pas clairement indiquée même avec la « forme générale ».

*L'équation particulière*

La suite de notre commentaire est liée aux phrases numérotées 4 et 7 que nous reproduisons ci-dessous, classées en discours contextualisé :

> « attends tu l'passes pas là tu divises, tu l'passes entre guillemets hein, tu divises là... Entre guillemets, tu divises là....c'est une »
> « non c'est pas moins x parce que justement il a divisé directement par moins deux racine de deux sur trois donc c'est pas moins x. En effet si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par deux racine de deux sur trois ce qui revenait au même après puisque tu trouvais moins.... et deux racine de deux sur trois alors la solution donc alors x égal quatre fois quatre demi moins un tiers d'accord... »

Exceptées les confirmations que l'enseignante apporte aux élèves, toutes les phrases portent sur la division et contiennent un mot l'évoquant directement « tu divises », « il a divisé » ou indirectement « tu passes ». L'expression « passer » avait été reprise par l'enseignante pour la corriger « tu passes pas là tu divises » puis a été acceptée en lui donnant un "synonyme mathématique" « tu passes entre guillemets hein, tu divises là », le même que celui corrigé.
Ces phrases données en réponses à des propos d'élèves ou en étant directement conséquentes, corrigent ou précisent ce qu'ils disent « attends, tu l'passes pas là, tu divises » ou bien replacent d'un point de vue mathématique le vocabulaire employé « tu l'passes entre guillemets hein, tu divises là... ». Ces phrases servent aussi d'explication à ce que l'élève au tableau effectue comme

calcul, pour lui-même « bon tu passes, le moins il reste là d'accord » ou bien à un autre qui peut aussi être la classe « parce que justement il a divisé directement par $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ donc c'est pas moins x... ». Cette dernière explication, qui repose sur la division, laisse entendre que les deux membres de l'équation sont divisés. En effet, l'enseignante précise : « il a divisé directement par $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ donc c'est pas moins x. En effet, si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par $(\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ce qui revenait au même après puisque tu trouvais moins... et $(\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ». Ainsi, la division apparaît explicitement et les deux membres de l'équation sont mentionnés, le premier avec le début de la phrase, le deuxième avec le résultat : « tu trouvais moins... et $(\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ».

Finalement, nous interprétons ces phrases suivant deux scénarios :

1- l'enseignante tient pour acquises cette propriété – division des deux membres de l'équation – ainsi que la reconnaissance des situations dans lesquelles il faut la mettre en œuvre. Elle utilise alors la propriété sans donner le détail de sa mise en œuvre, dans le seul but de convaincre les élèves que, suivant le facteur avec lequel la division des deux membres de l'équation sera faite $(-\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ou $(\frac{2\sqrt{2}}{3})$ le résultat sera x ou -x, c'est-à-dire que la présence ou l'absence du signe moins devant x ne dépend que du facteur par lequel les deux membres sont divisés.

2- l'enseignante veut asseoir cette propriété de division des deux membres d'une équation par le même facteur en sous-entendant que dans tous les cas de figure, l'opération est bien une division et que, par conséquent, le signe moins ne dépend que du facteur par lequel sont divisés les deux membres de l'équation.

Dans ces deux scénarios, la justification de la division n'est pas abordée.

Nous retiendrons des deux commentaires que l'enseignante juxtapose les deux équations générale et particulière, sous-entendant qu'elles se ressemblent : les élèves doivent accepter cette ressemblance et rétablir les raisons qui conduisent à diviser ; l'opération entre x et le scalaire qui se trouve dans le même membre est une multiplication, pour "neutraliser" ce scalaire il faut faire apparaître son symétrique (i.e. son inverse) pour cela on utilise une propriété que l'enseignante évoque, on divise les deux membres de l'équation par le même nombre...

L'enseignante a juxtaposé les deux équations et indiqué l'aboutissement du raisonnement à tenir pour les résoudre.

### ii- Deuxième étape : le texte du manuel

Nous trouvons deux propriétés exposées dans le texte du manuel que nous identifions comme la compatibilité de la relation d'équivalence "=" sur R avec la somme et le produit par un scalaire. Ces deux propriétés sont suivies d'exemples et ensuite reprises et explicitées en " mots" sous forme de conséquences.

Voici le texte des propriétés :

| | |
|---|---|
| **Propriété 1** | Pour tous les nombres a, b, c : <br> si $a = b$ alors $a + c = b + c$ ; si $a + c = b + c$ alors $a = b$. |

exemples : ...

| | |
|---|---|
| Propriété 2 | Pour tous les nombres a, b, c avec $c \neq 0$ : <br> si $a = b$ alors $ac = bc$ ; si $ac = bc$ alors $a = b$. |

exemples : ...

**b. Conséquences**

Pour résoudre une équation on utilise les propriétés suivantes :

| |
|---|
| **Propriété 1** Si on ajoute ou si on soustrait un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première. |

exemples : Résoudre l'équation $5x = 4x + 3$.

| |
|---|
| **Propriété 2** Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que la première. |

exemples : Résoudre l'équation $-\frac{1}{5}x = 2$.

$$-\frac{1}{5}x = 2$$
$$x = 2 \times (-5)$$
$$x = -10$$

L'équation a une solution : -10

*Pour trouver x, on divise les deux membres de l'équation par* $-\frac{1}{5}$ *ce qui revient à multiplier les deux membres par -5.*

Le texte de la deuxième propriété des conséquences indique une multiplication ou une division pour transformer une équation. Il informe aussi sur les solutions.
Nous trouvons donc le mot « division » commun au texte du manuel et au cours de l'enseignante, utilisé dans le même contexte de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Cependant, nous remarquons que l'enseignante ne reproduit pas textuellement le texte de la propriété 2 du manuel où apparaît ce mot.
L'exemple fait apparaître un coefficient de x, le commentaire indique une division (ainsi qu'une multiplication) mais ne propose pas d'analyse de l'équation à résoudre pour expliquer la division. Les élèves doivent reconnaître une multiplication entre le scalaire du membre de gauche et x puis associer cette situation à la propriété 2…

Nous constatons que le texte du manuel ne mentionne nulle part « une forme d'équation » ou un modèle d'équation. Ainsi, nous ne retrouvons pas pour ce chapitre de ressemblance directe entre le discours tenu par l'enseignante et le contenu du manuel à propos de l'identification d'une équation à « la forme ax = b ». Cependant, nous constatons une procédure où les mêmes analyses restent implicites et où les mêmes actions prévalent :

- juxtaposition de deux équations,
- précision d'une propriété,
- production d'une réponse.

### iii- Conclusion

Le passage décontextualisé qui porte sur « la forme ax = b » nous permet de conclure que l'enseignante a laissé apparaître d'autres connaissances que celles strictes du manuel. Dans les explications contextualisées de l'enseignante nous remarquons des éléments du manuel mais qui

n'apparaissent pas exactement comme ils y sont exposés. Ces explications sont données quand les élèves expriment des difficultés de compréhension.
Nous avons constaté que les connaissances "hors manuel" (connues des élèves) qui apparaissent ne sont pas explicitement mises en relation avec celles qui peuvent être identifiées à des éléments du manuel.
Il est remarquable de constater la juxtaposition de ces connaissances. Cette juxtaposition peut entraîner les élèves à faire le lien entre elles, à constater qu'elles sont les mêmes et finalement à réorganiser leurs acquis.

Finalement, nous conclurons que tout se passe comme si l'enseignante voulait "entraîner les élèves vers le haut" tout en essayant de faciliter leur compréhension ; pour cela elle utilise un vocabulaire qui peut leur être familier, qui est celui du manuel, tout en voulant mettre en évidence des éléments de connaissance de portée plus générale. Cependant, des éléments importants pour que les élèves construisent leurs connaissances restent implicites. Le manuel n'explicite pas davantage ces éléments. Les élèves doivent effectuer un saut qui peut être trop important pour certains.

### *3.1.1.2- Deuxième extrait du cours de l'enseignante que nous comparons au manuel*

#### i- Présentation

Le deuxième point de comparaison que nous allons approfondir est l'utilisation par l'enseignante de l'expression « équation-produit » que nous élargissons à l'étude de tous les passages qui peuvent s'y rapporter, c'est-à-dire à tous ceux où figurent les expressions « identité remarquable » et « produit de facteurs ».
Notre motivation pour retenir ces trois expressions provient du passage ci-après du manuel, qui définit le terme équation-produit et propose une propriété suite à cette définition. La définition et la propriété sont assorties d'exemples que nous ne reproduisons pas ici (voir annexe). Un cas particulier est signalé en fin de page du manuel, nous le reproduisons.

**Equation-produit**

**a. Définition**

Une équation produit est une équation dont l'un des membres est un produit de facteurs et l'autre est zéro. Pour résoudre une équation produit, on utilise la propriété suivante :

| Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors le produit est nul. |
|---|

**b. Cas particuliers**

Certaines équations dont l'écriture développée et simplifiée contient des termes où l'inconnue a un exposant supérieur ou égal à deux, peuvent être transformées en équation-produit, en transposant tous les termes dans un membre et en factorisant.

Notons à propos de la propriété du texte encadré que ni les élèves ni l'enseignante ne la citent explicitement ou ne l'indiquent durant toute la séance. Cependant, cette propriété est utilisée par les élèves dès les premiers exercices et est implicitement signifiée par l'enseignante à plusieurs reprises.

Notons de même que la définition d'équation-produit n'est jamais abordée dans cette séance, seule l'expression est utilisée par l'enseignante.

Nous devons enfin remarquer qu'une partie d'un précédent cours portait précisément sur les équations-produit puisque « équation-produit » apparaît sous forme de titre de ce qui a déjà été abordé quand l'enseignante demande aux élèves de prendre leur cours et de passer aux inéquations : « bon allez on passe aux inéquations alors vous prenez votre cours... Grand trois : alors grand un, équation du premier degré ; deux <u>équations-produit</u>. Trois alors on va faire des rappels. Alors premier rappel... »

### ii- Le discours de l'enseignante

Nous avons retenu comme deuxième extrait du discours de l'enseignante trois passages que nous reproduisons et commentons.

*Premier passage* :

« P- (l'enseignante lit ce que l'élève a écrit au tableau) alors x carré égal quatre ($x^2 = 4$), x carré moins quatre égal zéro ($x^2 - 4 = 0$). x carré égal quatre ($x^2 = 4$), x égal racine de quatre ($x = \sqrt{4}$) et ça donne x égal racine de quatre ?

« E- x égal deux

« P- ou ?

« E- x égal moins deux

« P- ou moins deux n'oublie pas hein alors avec ce qu'on a vu hier hein, x carré moins quatre ($x^2 - 4$) ; x carré moins deux carré ($x^2 - 2^2$). Egalité remarquable : x moins deux facteur de x plus deux d'accord ($(x - 2)(x + 2)$) »

L'élève au tableau semble privilégier une résolution calquée sur un modèle $x^2 = a$, équation qui admet deux racines si a est positif. L'enseignante lui recommande de ne pas oublier de factoriser. Le résultat de cette factorisation se traduit alors par la production de deux solutions. Juste avant, l'enseignante avait questionné l'élève de sorte à lui faire produire les deux solutions. (« P- ça donne $x^2 = 4$ ? ; E- $x = 2$ ; P- ou ? E- $x = -2$ ; P - n'oublie pas... égalité remarquable...).
Il semble que l'utilisation des identités remarquables ne soit pas encore bien maîtrisée par les élèves.

*Deuxième passage* :

« P- bon alors déjà là on va s'occuper de celui-là, on s'occupera de celui-là après. Donc t'as déjà racine de dix-huit sur moins racine de trois ($\frac{\sqrt{18}}{-\sqrt{3}}$). Alors déjà le signe bon et puis on pourra peut-être simplifier. Racine de dix-huit c'est égal à quoi ?

« E- euh c'est neuf fois deux

« P- si tu veux mais y'a peut être une autre décomposition ?

« E- six fois trois

« P- donc on enlève ça comme ça, ça fait donc racine sur racine de trois et ça c'est égal à quoi ?

« E- à racine de six

« P- à racine de six

[bruit]

« P- tu as oublié quelque chose on n'oublie pas la deuxième racine il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a faites quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la deuxième solution. Alors que quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord (?) »

Le deuxième passage est situé après la résolution des équations suivantes :

$(2x - 5)(4x - 3) = 10 - 4x$ ; $(5x - 3)^2 = 4$ ; $9(3x - 1)^2 = 16$ ; $x^2 = 4$ ; $x^2 = 49$ ; $x^2 = 5$ ; $2x^2 - 3 = 0$ ; $7x^2 - 14 = 0$ ;

$-3x^2 + 18 = 0$.

Pour deux de ces équations : $x^2 = 4$ et $-3x^2 + 18 = 0$ les élèves n'ont donné qu'une seule racine solution. Ils en ont "oublié" une. Le deuxième passage suit la résolution de la deuxième de ces équations : $-3x^2 + 18 = 0$ sujette à erreur pour les élèves.

Avec la dernière intervention, l'enseignante rappelle une procédure en la comparant à une autre. Les deux points ainsi abordés ne décrivent pas les mêmes situations.

Le premier point évoque la définition de la racine carrée et certainement la résolution de l'équation « $x^2 = a$ », le deuxième point rappelle une procédure de résolution de certaines équations du second degré à une inconnue. Cette procédure qui porte sur la résolution de $-3x^2 + 18 = 0$ apparaît comme un point d'ordre méthodologique, nous y trouvons les deux expressions « identité remarquable » et « équation-produit » et nous lui attribuons cette teneur :

« quand vous devez résoudre une équation du second degré à une inconnue il faut

- la transformer de sorte à obtenir une équation équivalente dont l'un des deux membres est nul,

- reconnaître une identité remarquable afin d'écrire le membre non nul sous forme d'un produit de facteurs du premier degré,

- l'équation initiale étant ainsi transformée en une équation produit, il suffit de conclure et "toutes" les solutions apparaîtront (...) ».

Ce qui apparaît comme une méthode dans le discours de l'enseignante apparaît sous la même forme dans le manuel.

« Certaines équations dont l'écriture développée et simplifiée contient des termes où l'inconnue à un exposant supérieur ou égal à 2, peuvent être transformées en équations-produit, en transposant tous les termes dans un membre et en factorisant »

Nous constatons donc dans le discours de l'enseignante une référence à une méthode exprimée à l'aide de la même expression « équation-produit » que dans le manuel. La méthode n'est pas explicitée et le seul lien entre les deux expressions « équation-produit » et « identité remarquable » qui nous ont permis de l'établir est constitué par leur juxtaposition, les élèves doivent rétablir le reste.

Ainsi, pour insister sur l'importance de l'utilité des identités remarquable, pour insister sur l'importance de la réduction d'une expression de degré supérieur ou égal à deux en un produit de facteurs de premier degré et peut-être aussi, pour insister sur l'idée plus générale qu'une équation du second degré admet en général deux racines, l'enseignante introduit le point d'ordre méthodologique. Puisqu'il s'agit d'un point d'ordre méthodologique, que son utilisation peut avoir comme but d'attirer l'attention des élèves sur les deux racines d'une équation du second degré, qu'il est formulé aux élèves après échec partiel (ou oubli), nous pouvons admettre que l'enseignante - pour cette formulation - emploie de façon intentionnelle un vocabulaire familier aux élèves. Ce vocabulaire est constitué des deux expressions « identité remarquable » et « équation-produit ».

*Troisième passage* :

« E- mais

[bruit]

« P- je passe le, je passe entre guillemets le quatre de l'autre côté ça te donne moins seize égal quatre x carré ($-16 = 4x^2$) c'est d'accord (?)

« E- ouais

« P- que je peux lire quatre x carré égal moins seize ($4x^2 = - 16$) ou alors je fais moins quatre x carré égal plus seize ($- 4x^2 = +16$) ou quatre x carré égal moins seize ($4x^2 = -16$) d'accord. Bon voilà qu'est ce qu'il y a Nadine ?

« E- on passe le seize de l'autre côté euh moins quatre x carré égal plus seize vous pouvez pas mettre moins quatre x carré égal non moins quatre x carré moins quatre carré égal

« P- bon alors soit on les résout avec les identités remarquables comme on a fait hier les équations produits. Là on est capable de le faire puisqu'on a en fait on a quatre x carré plus seize égal zéro. On n'a rien, on n'a aucun moyen à notre disposition pour le mettre sous la forme de produit de facteurs de premier degré d'accord bon alors on peut les résoudre avec les racines comme on a fait l'autre fois hein donc il faudrait ça voudrait dire qu'on devrait écrire racine de ça égal racine de ça. Mais ça t'as pas le droit d'écrire parce que moins quatre x carré c'est un nombre négatif d'accord.

« E- ben oui mais ça fait moins racine de quatre x carré

« P- x carré est un nombre positif donc moins quatre x carré est un nombre négatif »

Deux pistes sont explorées, l'une consiste à identifier l'équation au modèle $x^2 = a$, l'autre consiste à écrire l'équation sous la forme d'un polynôme nul. La définition d'« équation-produit » est presque totalement explicitée pour montrer que $4x^2 + 16 = 0$ n'admet pas de solution. Nous remarquons ici que le fait de ne pas pouvoir factoriser $4x^2 + 16$ sous forme de produit de facteurs du premier degré suffit à conclure que l'équation n'a pas de solution. Ici aussi une grande importance est donnée à la factorisation ou à la "réduction sous forme d'équation-produit".
La fin de l'extrait est une démonstration du fait qu'il n'y a pas de solution (voir à ce propos les commentaires des passages décontextualisés, huitième passage).
Nous remarquons ici aussi un extrait d'ordre méthodologique qui suit une résolution source de problème pour les élèves.
De même que pour l'extrait précédent, nous estimons que l'enseignante utilise de façon intentionnelle un vocabulaire familier aux élèves. Dans ce vocabulaire, nous retrouvons les expressions « identité remarquable » et « équation-produit ».

Les trois extraits reposent sur la résolution d'équations équivalentes à une équation de "modèle" « $x^2 = a$ ». Les interventions de l'enseignante mêlent deux points de vue. Le premier influencé par les élèves tend à faire apparaître ce modèle. Le second inscrit les équations à résoudre dans le cadre plus général de recherche des racines d'un polynôme. Les deux points de vue semblent davantage s'opposer que se compléter.
Nous mettons en parallèle cette situation et la séparation, en chapitres distincts que présente le manuel, des résolutions d'équations à une inconnue. Le chapitre 1 du manuel propose la

résolution de $x^2 = a$, le chapitre 3 auquel nous comparons le cours présente la résolution d'équations à une inconnue sans autre précision.
Par ailleurs, une phrase de l'enseignante indique que le "cas $x^2 = a$" a déjà été vu.
Tout se passe comme si l'enseignante suivait l'agencement du manuel en présentant aux élèves la résolution d'équations à une inconnue en deux parties séparées et comme si ses connaissances l'entraînaient à tenter de faire un lien entre ces deux parties. Ce lien est peu explicite.

### iii- Conclusion

Nous constatons que l'enseignante évoque trois sujets avec les élèves : les identités remarquables, la factorisation en produit de facteurs du premier degré et les équations-produit.
Nous trouvons une ressemblance entre le manuel et le cours de l'enseignante concernant le terme d'équation-produit. Ce terme est associé à l'idée qu'une équation transformée de la sorte peut être résolue.
Finalement, nous retiendrons que :

- l'enseignante veut utiliser le terme équation-produit car il correspond à un vocabulaire commun aux élèves, au manuel (leur outil) et à elle-même,
- nous trouvons les mêmes juxtapositions dans le discours de l'enseignante et dans le manuel,
- l'enseignante adopte l'organisation des résultats du chapitre,
- des connaissances de niveau (n+p) s'expriment implicitement sans toutefois entraîner l'enseignante à démarquer son cours du contenu du manuel,
- nous trouvons les mêmes implicites dans le discours de l'enseignante et dans le texte du manuel.

## 3.1.2- D'autres comparaisons

### *3.1.2.1- Certains termes de vocabulaire*

*« racine »*

Le terme « racine » apparaît consécutivement à la résolution de l'équation $-3x^2 + 18 = 0$ puis à l'occasion d'un passage d'ordre méthodologique de mathématiques décontextualisées portant sur la résolution des équations du second degré à une inconnue.

Voici le passage :

> « P- Donc t'as déjà racine de dix-huit sur moins racine de trois. Alors déjà le signe bon et puis on pourra peut-être simplifier. Racine de dix-huit c'est égal à quoi ?
>
> « E- euh c'est neuf fois deux
>
> « P- si tu veux mais y'a peut être une autre décomposition ?
>
> « E- six fois trois
>
> « P- donc on enlève ça comme ça, ça fait donc racine sur racine de trois et ça c'est égal à quoi ?
>
> « E- à racine de six
>
> « P- à racine de six
>
> [bruit]
>
> « P- tu as oublié quelque chose on n'oublie pas la deuxième racine. Il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a faites quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la deuxième solution. Alors que quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord ?. »

Nous constatons que la première fois que l'enseignante emploie le terme « racine », il s'agit d'une « deuxième racine » et il peut s'agir de « racine de 6 ». En effet, il fallait obtenir deux solutions ; $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$. La première était apparue, donnée par l'élève au tableau et lue par l'enseignante. La deuxième est l'objet d'une intervention de l'enseignante : « tu as oublié quelque chose on n'oublie pas la deuxième racine ». La solution "oubliée" est l'opposée de la racine carrée d'un entier non carré parfait, elle est aussi "racine" dans le sens solution de l'équation. La dénomination de cette autre solution nécessite le recours au terme « racine ». Nous pouvons donc penser que ce n'est que de ce fait que l'enseignante rappelle à l'élève de ne pas oublier la deuxième racine. Une autre explication est possible : les élèves connaissent la racine carrée, ils ont certainement vu qu'elle est définie sur les nombres positifs et qu'elle définit un nouveau nombre positif. Ce caractère positif de la racine carré d'un nombre positif est peut-être ce qui a conduit l'élève à ne proposer comme solution que le nombre positif $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$ lui paraissant négatif et donc impossible. Il est possible ici qu'il y ait une confusion entre la définition positive de la racine carrée et le nombre négatif qu'est l'opposé de cette même racine. Il peut y avoir ici ambiguïté, si tel est le cas, elle est levée en effet, à la fin du passage l'enseignante utilise le terme « racine » dans un contexte différent.

> « P- tu as oublié quelque chose on n'oublie pas <u>la deuxième racine.</u> Il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a faites quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la <u>deuxième solution</u> alors que quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la <u>deuxième racine</u>. Enfin la <u>deuxième solution</u> d'accord ?. »

Il s'agit alors de donner une procédure qui permet de ne pas "oublier" de solution pour les équations se réduisant à $x^2 - a = 0$ $(a>0)$ : « quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord ». L'enseignante utilise ici le mot « racine » pour désigner les solutions d'une équation, elle associe « deuxième racine » et « deuxième solution ». Nous constatons que dès l'expression « deuxième racine » prononcée, l'enseignante se reprend en indiquant « deuxième solution ».

*« transposé »*

Ce terme n'apparaît qu'une seule fois durant tout le cours. Un élève a commencé la résolution de $(2x - 5)(4x - 3) = 10 - 4x$, l'enseignante l'interpelle :

> « P- bon alors Alexandre, ... ta factorisation.... tu t'es trompé déjà... dans un signe
>
> « E- c'est moins alors
>
> « P- non, là c'est plus puisqu'on a transposé mais c'est dans ta factorisation que ça marche pas
>
> « E- là c'est plus deux oui moins deux ouais moins deux x
>
> « P- oui c'est moins deux x parce que moins deux que multiplie moins deux x ça donne bien <u>plus</u> quatre x hein « d'accord »

Nous pouvons dire qu'il s'agit d'une utilisation "courante" de ce terme, pour indiquer qu'un terme a été ajouté dans les deux membres d'une équation de sorte à "éliminer" son opposé qui était l'un des termes de l'un des membres de l'équation. Ainsi, il semble que le terme en question soit "passé" ou qu'il ait été "transposé" du membre de l'équation dans lequel il figurait vers l'autre membre de l'équation. Nous reconnaissons ici cet usage puisqu'il sert de justificatif à l'enseignante pour indiquer à l'élève au tableau qu'il doit écrire +4x et non -4x (« là c'est plus puisqu'on a transposé »). La suite montre que cette explication est aussitôt abandonnée, l'erreur étant ailleurs (« mais c'est dans ta factorisation que ça marche pas »)

### *3.1.2.2- Commentaire et conclusion*

Le premier terme « racine » apparaît d'abord sans que nous puissions décider du sens dans lequel il est utilisé : "racine d'une équation" ou "racine d'un nombre non carré parfait ($\sqrt{6}$)". Il est ensuite affecté du premier sens mais est immédiatement remplacé. Ceci nous conduit à penser que sa première apparition sous-entendait "$\sqrt{6}$" et non "racine d'une équation".

Nous constatons que le manuel n'emploie pas le mot « racine » dans un autre sens que celui de la racine d'un nombre c'est-à-dire dans un sens outil. La notion « racine d'une équation » n'est pas utilisée. Ainsi, l'enseignante a laissé échapper, puisqu'elle le corrige immédiatement, un terme qui n'est pas directement extrait du manuel. Elle l'a ensuite remplacé par un autre connu et plus familier des élèves.

Le deuxième terme « transposé » n'est utilisé qu'une seule fois, très brièvement pour expliquer une opération. Il est aussi un terme du manuel puisque nous le trouvons utilisé dans le même sens dans la partie "savoir faire".

Notre conclusion pour ces deux termes est la suivante :

Les connaissances de l'enseignante autres que celles du manuel sont présentes puisqu'elles apparaissent parfois (« racine »). Cependant, tout se passe comme si l'enseignante semblait préférer utiliser un vocabulaire qui paraît commun au manuel et aux élèves.

## *3.2- Deuxième partie de la séance*

La comparaison de la deuxième partie du cours de l'enseignante au texte du manuel sera plus succincte que celle de la première partie. Un commentaire en cinq points sera suivi d'une étude portant sur des éléments de différence entre le discours et le texte.

### 3.2.1- Commentaire en cinq points

#### *3.2.1.1- Les textes institutionnalisés*

Le contenu exposé par le manuel et celui abordé par l'enseignante portent sur les mêmes thèmes que nous caractériserons ainsi : “action des opérations somme et produit sur une inégalité”.

Malgré l'identité des sujets abordés, les énoncés que nous trouvons rédigés dans le manuel et ceux proposés par l'enseignante ne sont pas les mêmes.

Cette raison explique la ligne réservée aux « propriétés des inégalités » pour le manuel et celle qui suit, réservée au discours de l'enseignante du dernier tableau de la première partie.

Le manuel propose des propriétés des inégalités :

**Propriété des inégalités**

**propriété 1**

| |
|---|
| Pour tous les nombres a, b, c : |
| si $a < b$ alors $a + c < b + c$ |
| si $a + c < b + c$ alors $a < b$ |

**propriété 2**

| |
|---|
| Pour tous les nombres a, b, c : |
| si $a < b$ et c **strictement positif** alors $ac < bc$ |
| si $ac < bc$ et c **strictement positif** alors $a < b$ |
| Pour tous les nombres a, b, c : |
| si $a < b$ et c **strictement négatif** alors $ac > bc$ |
| si $ac < bc$ et c **strictement négatif** alors $a > b$ |

L'enseignante propose des « règles des inégalités » :

« quels que soient les nombres a, b et c, a plus c et b plus c sont rangés dans le même ordre que a et b » et plus loin,

> « quels que soient les nombres a et b, si c est un nombre strictement positif alors le produit ac et le produit bc sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b. Si c est un nombre strictement négatif alors ac et bc sont rangés dans l'ordre inverse de a et b »

Le manuel propose pour la propriété 1 deux phrases illustrant la compatibilité de "<" avec l'addition puis pour la propriété 2 quatre phrases illustrant l'action d'un produit sur "<". Toutes ces phrases sont en partie écrites à l'aide d'un symbolisme mathématique et sont énoncées sous forme de règles "prêtes à l'emploi"[2]. Les signes < et > indiquent qu'il s'agit d'inégalités, mot qui apparaît dans le titre « propriétés des inégalités ». Le signe du nombre « c » de la « propriété 2 » est indiqué en lettres « c **strictement positif** » puis « c **strictement négatif** » (c'est le manuel qui souligne), il n'est pas indiqué avec le même symbolisme que les inégalités « $c > 0$ », « $c < 0$ ». Nous pouvons supposer que l'objectif de cette présentation est d'attirer l'attention des élèves sur le signe du nombre c. La rédaction des propriétés peut conduire un lecteur à prêter attention à certaines opérations effectuées sur les inégalités.

L'enseignante propose de caractériser l'action d'une somme puis d'un produit sur toute inégalité, sans en désigner une particulière. Ces actions sont énoncées en termes mathématiques mais ne sont pas écrites à l'aide d'un symbolisme mathématique qui obligerait alors à "choisir une inégalité". Leur présentation ressemble à un énoncé général décontextualisé des situations dans lesquelles les élèves auront à les manipuler. Leur énoncé ressemble davantage à des propriétés qu'à des « règles » décrivant un mécanisme opératoire.

Le parti pris des rédacteurs du manuel de choisir une inégalité pour illustrer les propriétés 1 et 2 n'est pas suivi par l'enseignante.

Nous dirons donc que les textes de propriété du manuel et les règles proposées par l'enseignante ne sont pas de même nature. Le manuel présente des exemples sous forme de règles "prêtes à l'emploi", l'enseignante propose un énoncé général décontextualisé sous forme de propriété.

Côté manuel, les élèves doivent réaliser que ce qui est vrai avec "<" l'est aussi avec "≤" ou avec ">" ou encore avec "≥", c'est-à-dire que la notation "<" doit pouvoir aussi être lue ">" ou "≥" ou encore "≤" par les élèves. Ce travail d'adaptation est le seul que les élèves ont à fournir pour mettre en œuvre les propriétés.

[2] Nous utilisons l'expression "prêtes à l'emploi" pour signifier que chacune des phrases illustre un objectif particulier : faire "apparaître" ou "disparaître" un scalaire dans une inégalité (cf. annexe : les manuels).

Côté enseignante les élèves doivent reconnaître dans ses propos qu'il s'agit « d'inégalité » puis doivent pouvoir adapter l'énoncé général aux inégalités dont ils disposeront dans les exercices à traiter.

Le travail à la charge des élèves n'est pas le même en fonction du texte de propriété qui leur est présenté. De ce point de vue l'enseignante est davantage du côté d'un certain savoir que le manuel.

### *3.2.1.2- Les exemples*

L'enseignante traite des exemples suite à chacun des énoncés de propriétés. Nous remarquons la même procédure pour le manuel, chaque propriété est suivie d'exemples. Mais de même que les énoncés de propriétés ne sont pas de même nature, les exemples exposés dans le manuel et ceux choisis par l'enseignante ne sont pas de même nature.

Le manuel propose des exemples mettant en jeu deux inconnues génériques (a et b) et un scalaire dont la valeur est précisée. Le sens de l'inégalité de chacun des exemples est celui de la propriété qu'ils suivent. La forme des exemples est la même que celle des propriétés « si...alors... ». La condition annoncée par « si » est la même dans les exemples et les propriétés : « si a < b ». Les exemples du manuel "montrent" des valeurs possibles du scalaire « c », les exemples génériques ont été particularisés.

Les exemples sont les suivants :

Exemples (suite à la propriété 1 reproduite ci-dessus)

Si $a < b$ alors $a - 2 < b - 2$.

Si $a + \pi - 1 < b + \pi - 1$ alors $a < b$.

Exemples (suite à la propriété 2 reproduite ci-dessus)

Si $a < b$ alors $-3a > -3b$.

Si $-0{,}5a < -0{,}5b$ alors $a > b$.

L'enseignante propose comme exemples des cas particuliers mettant en jeu 3 inconnues a, b et c mais où le "sens" de l'inégalité est précisé :

« Par exemple si a est supérieur à b alors a + c est supérieur à b + c. Bon y'a les trois hein, supérieur ou égal, « strictement inférieur, inférieur ou égal

« Alors par exemple si on a, juste un exemple hein, si on a deux nombres a et b tels que a soit inférieur ou égal au « nombre b alors on va les multiplier par un nombre c strictement positif alors qu'est ce qu'on va pouvoir dire ? (ac) « plus petit ou égal, inférieur ou égal à (bc)

« et si on les multiplie par un nombre d strictement négatif (ad) supérieur ou égal à bd ».

Ces exemples illustrent un sens possible pour une inégalité (supérieur pour le premier, inférieur ou égal pour le deuxième), ils "montrent" un sens possible de l'ordre dans lequel les nombres a et b peuvent être rangés. Nous remarquons donc que les exemples donnés par l'enseignante ne portent pas sur le même contenu que ceux exposés suite aux propriétés 1 et 2 du manuel, ils ne "montrent" pas la même chose. Nous remarquons aussi (cf. ci-dessus a) que ces exemples sont les textes de propriété 1 et 2 du manuel. Seul le sens écrit de l'inégalité change ("<" pour le manuel ">" pour l'enseignante ) ainsi que le nom du scalaire négatif par lequel chaque membre de l'inégalité est multiplié en illustration de « ordre et multiplication » pour l'enseignante et de la propriété 2 pour le manuel (respectivement d et c).

Apportons un nouvel éclairage en revenant un instant aux « règles » que l'enseignante annonçait aux élèves. La formulation qu'elle employait peut être transposée en une formulation similaire à celle des exemples. En effet « être rangé dans le même ordre » signifie pour des élèves de Troisième « être dans le même ordre croissant ou décroissant » ce qui signifie « être rangé du plus petit au plus grand ou bien du plus grand au plus petit ». En utilisant les signes d'inégalité on peut alors écrire l'un des exemples.

Ainsi les exemples peuvent être interprétés comme une transposition en « vocabulaire élève de Troisième » des « règles des inégalités ». Cette transposition conduit à relier les propos de l'enseignante à ceux du manuel. Une différence est cependant maintenue qui réside dans la présentation des cas abordés en deux phrases pour le manuel (si $a < b$ alors $a + c < b + c$, si $a + c < b + c$ alors $a < b$) et qui se réduit à une phrase pour l'enseignante.

Finalement tout se passe comme si les propos de l'enseignante étaient complémentaires au contenu du manuel en se situant "avant" celui-ci. Nous pouvons établir la succession suivante :

« règles des inégalités de l'enseignante » → « exemples de l'enseignante » presque identiques aux « propriétés du manuel » → « exemples du manuel » exprimés d'un point de vue opératoire pour les élèves.

Tout se passe comme si l'enseignante voulait compléter en amont le manuel que les élèves auront à utiliser directement pour rendre opératoire ce qu'ils auront "acquis" en classe.

Ici tout se passe comme si l'enseignante utilisait ses connaissances essentiellement à l'extérieur de la classe pour préparer un cours complémentaire à celui du manuel et comme si elle laissait aux élèves la charge d'adapter ce dernier aux situations dans lesquelles ils se trouveront.

### *3.2.1.3- Les « conséquences » du manuel*

Les conséquences que le manuel expose suite aux propriétés ne sont pas explicitement reproduites par l'enseignante.

Voici les textes des conséquences proposées comme propriétés :

Propriété 1

> Si on **ajoute** ou si on **soustrait** un même nombre aux deux membres d'une inéquation alors **on ne change pas le sens de l'inégalité** et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.

Propriété 2

> Si on **multiplie** ou si on **divise** les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement positif,** alors **on ne change pas le sens de l'inégalité** et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.
>
> Si on **multiplie** ou si on **divise** les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif,** alors **on change le sens de l'inégalité** et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.

Nous remarquons une partie de la rédaction exprimée en termes d'actions d'élèves. Une nouvelle idée apparaît avec la fin des propriété : « on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première ». Nous y voyons une référence à l'équivalence de deux inéquations, exprimée elle aussi en termes d'actions d'élèves puisque leur objectif est de résoudre, de "trouver des solutions" aux inéquations qui peuvent leur être proposées. Nous remarquons la distinction apportée à l'emploi des deux expressions « membres de l'inéquation » et « sens de l'inégalité ». Une inéquation est ainsi constituée de deux membres et d'une inégalité écrite dans un sens. Nous pouvons reconnaître une terminologie spécifique des élèves.

Les conséquences du manuel ressemblent aux résultats que l'enseignante institutionnalise dès le début comme règles des inégalités que nous rappelons ci-dessous, mais ne leur sont pas identiques.

> « quels que soient les nombres a, b et c, a plus c et b plus c sont rangés dans le même ordre que a et b »

et plus loin,

> « quels que soient les nombres a et b, si c est un nombre strictement positif alors le produit ac et le produit bc sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b. Si c est un nombre strictement négatif alors ac et bc sont rangés dans l'ordre inverse de a et b. »

Leur ressemblance est provoquée par les termes « ajouter » du manuel et « plus » de l'enseignante, et par l'expression « on (ne) change (pas) le sens de l'inégalité » du manuel et « rangés dans le même ordre (dans l'ordre inverse) » de l'enseignante.

Ce qui distingue le texte du manuel de cette partie du discours de l'enseignante repose sur quelques termes de vocabulaire : pour désigner les opérations effectuées sur les « membres des inégalités », le manuel distingue l'addition et la soustraction (« si on ajoute ou si on soustrait ») puis, il distingue la multiplication et la division (« si on multiplie ou si on divise »). Un élève peut comprendre qu'il y a quatre situations différentes correspondant aux quatre opérations qui semblent alors totalement distinctes et peut lire le texte comme une description de ce qu'il fait quand il résout des inéquations. L'enseignante résume en un seul terme chacune des deux situations : « plus » pour la première, et « produit » pour la deuxième. Un élève peut comprendre qu'il y a deux situations différentes et doit convertir la situation d'état « plus » en situation d'action « on ajoute ». En introduisant les « règles des inégalités » l'enseignante fait appel à la mémoire des élèves et leur demande certains résultats établis l'année passée : « si on avait (...) l'addition, si on additionne le même nombre à chaque membre de l'inégalité » puis « au lieu d'ajouter aux deux membres de l'inégalité on va multiplier (...) alors vous vous souvenez quand on multiplie par un nombre c ... ». Ces deux interventions et une partie de l'exemple qui suit la règle « ordre et multiplication » : « on a deux nombres a et b on va les multiplier par un nombre c

… » sont les seuls moments où des « gestes élèves » sont décrits comme dans les textes du manuel.

D'un point de vue « action élève » le manuel est plus proche des élèves que l'enseignante. D'un point de vue savoir, l'expression de l'enseignante en est plus proche que celle du manuel.

Un autre point de distinction nous est donné par la terminologie de l'enseignante qui repose sur la comparaison des nombres réels c'est-à-dire sur la relation d'ordre, plus proche de niveau de connaissances supérieur au niveau (n) qu'à celui des élèves.

Ainsi, des textes présentant des contenus qui pourraient être identiques ne sont pas totalement semblables et ne sont pas non plus utilisés dans le même rôle par l'enseignante et dans le manuel.

Tout se passe comme si l'enseignante relisait d'un point de vue plus « mathématique » le contenu du manuel.

#### *3.2.1.4- Les titres*

L'enseignante donne des titres pour caractériser chaque contenu abordé. Le manuel annonce un titre général portant sur l'ensemble des contenus qu'il caractérise. Nous trouvons en commun aux deux le terme « inégalités » : « propriétés des inégalités » pour le manuel, « règles des inégalités » pour l'enseignante.

L'enseignante donne des titres plus significatifs que ceux précisés dans le manuel : ordre et addition (« alors premièrement, petit a on va rappeler les règles d'ordre et d'addition ») puis ordre et multiplication (« alors petit b ordre et multiplication »). Le manuel ne propose comme titre général que « propriétés des inégalités » puis comme titres spécifiques aux différentes propriétés : « propriété 1 » qui correspond à ordre et addition pour l'enseignante suivi de « propriété 2 » qui correspond à ordre et multiplication pour l'enseignante. Nous avons constaté que la forme des contenus abordés par l'enseignante était proche de la forme que l'on peut donner à une propriété tandis que celle du manuel était proche de la forme d'une règle. Nous assistons à une inversion. Le texte du manuel correspond plutôt à ce que développe l'enseignante et le titre de l'enseignante correspond plutôt à ce que le manuel développe.

Tout se passe comme si l'enseignante voulait donner aux élèves un moyen de relier ce qu'elle leur présente au contenu du manuel.

### *3.2.1.5- Des précisions*

Le titre « conséquences » du manuel est directement suivi de la phrase « pour résoudre une inéquation, on utilise les propriétés suivantes : (...) ». Pour introduire la suite du cours aux élèves, l'enseignante précise « on avait donner des règles pour savoir (...) résoudre les inéquations ».

Une partie qui n'apparaît pas dans la rubrique « l'essentiel » du manuel mais qui se trouve dans la rubrique « savoir faire » est indiquée comme l'un des objectifs de la séance par l'enseignante. Il s'agit de la résolution de système d'inéquations à une inconnue. L'enseignante précise aux élèves « on va juste en résoudre en plus des systèmes d'inéquations à une inconnue hein ».

Le manuel expose un exemple de résolution d'un système de deux inéquations à une inconnue dans la partie « savoir faire » avec comme titre : « résoudre un système d'inéquations à une inconnue ». Cet exemple traité est le seul à faire intervenir la notion de système d'inéquations dans ce chapitre du manuel.

Nous constatons ici une volonté commune exprimée par le texte du manuel et par l'enseignante d'informer les élèves sur l'utilité de ce qu'ils vont voir et sur les sujets qu'ils auront à traiter. L'utilité présentée et les sujets à traiter sont les mêmes.

## 3.2.2- Résumé et conclusion

Nous constatons avec la comparaison de la deuxième partie du cours de l'enseignante au texte du manuel une ressemblance entre les structures que l'enseignante donne à son cours et celle que le manuel expose. En effet, nous reconnaissons des propriétés, suivies d'exemples abordées dans le même ordre (ordre et addition puis ordre et multiplication). Nous remarquons aussi que certains buts poursuivis et annoncés sont identiques.

Le détail du contenu n'est pas abordé de la même manière par l'enseignante et le manuel. Nous constatons une personnalisation du cours de l'enseignante. Ce qui joue le rôle d'exemple pour l'enseignante joue partiellement le rôle de propriété principale à la lecture du manuel. Les exemples du manuel sont en partie contextualisés par des réels particuliers alors que l'enseignante propose des exemples "génériques". Ce qui joue le rôle de propriété institutionnalisée dans le discours de l'enseignante ressemble à ce qui joue le rôle de conséquence pour le manuel.

L'enseignante propose des titres qui caractérisent intrinsèquement ses futurs propos alors que nous trouvons dans le manuel des titres caractérisant par "une mention mathématique" générale, étrangère à leur contenu, les textes qu'ils exposent.

Enfin, nous avons noté qu'à l'aide d'une phrase, l'enseignante insiste sur le nombre d'inconnues des inéquations que les élèves auront à résoudre au terme de ce chapitre (« on va juste en résoudre en plus des systèmes d'inéquations à une inconnue hein. On est toujours à une inconnue »). Cette insistance interpelle les élèves (« ah parce que y'en a qui sont aussi ») qui conduit l'enseignante à donner ensuite une perspective sur ce thème (on verra à deux inconnues plus tard »).

Le nombre d'inconnues des inéquations était aussi précisé par le titre du chapitre du manuel mais il n'est en aucun lieu indiqué que plusieurs inconnues peuvent intervenir pour les inéquations.

Ce point est le dernier élément de ressemblance entre le discours de l'enseignante et le texte du manuel.

Notre conclusion sera la suivante.

Tout se passe comme si en adoptant une succession d'étapes similaire à celle du manuel l'enseignante procédait à une recomposition du texte du manuel. Cette recomposition n'est pas une reproduction, elle apparaît comme un complément se situant en amont du manuel. Le contenu de ce dernier ressemble à ce qu'un élève peut exprimer du sujet traité.

Ainsi nous pourrions attribuer comme objectif au discours de l'enseignante de décrire les connaissances à acquérir du point de vue d'un élève dont le niveau de connaissances est supérieur au niveau de la classe de Troisième.

Cette interprétation nous conduit à conclure que l'enseignante n'utilise pas ses connaissances à la construction chez les élèves de connaissances de niveau (n), elle les utilise à caractériser en classe ce qu'ils auront à acquérir.

### 4- Conclusion de la comparaison du discours de E3 et du texte du manuel

Nous avons constaté les éléments suivants.

-Une succession des contenus semblable dans le discours de l'enseignante et dans le manuel. Cette succession est :

| *pour l'enseignante* | *pour le manuel* |
|---|---|
| « règles des inégalités » | « propriétés des inégalités » |
| ordre et addition | propriété 1 (somme) |
| exemple (propriété 1 du manuel) | exemple |
| ordre et multiplication | propriété 2 (produit) |
| exemple (propriété 2 du manuel) | exemple |
| (suivi d'une démonstration). | conséquences |
| | propriété 1 (texte semblable à « ordre et addition ») |
| | exemples |
| | propriété 2 (texte semblable à « ordre et multiplication ») |
| | exemples |

- Un changement dans l'ordre des textes abordés : les « règles des inégalités » correspondent aux propriétés 1 et 2 du titre « conséquences » du manuel, les exemples suivant ces règles correspondent aux textes des propriétés 1 et 2 du titre « propriétés des inégalités » du manuel. Ce changement conduit à émettre l'hypothèse suivant laquelle l'enseignante interprète d'un point de vue (n+p) le contenu du manuel.

- Un vocabulaire différent et employé dans un autre sens que celui du manuel.

- L'ensemble des informations proposé par le manuel également présent dans le discours de l'enseignante.

- Une démonstration qui n'existe pas dans le manuel.

Nous concluons finalement que l'enseignante adapte ses connaissances à la structure des chapitres du manuel de sorte qu'elle en personnalise le contenu. Celui-ci, même semblable, n'est plus le même que celui du manuel. Nous trouvons les mêmes implicites, parties importantes des savoirs exposés, qui pourraient aider les élèves à construire leurs connaissances.

Tout se passe comme si l'enseignante faisait un compromis entre ses connaissances et le contenu du manuel. Le produit de ce compromis nécessite des élèves un travail d'adaptation que l'enseignante aide quelquefois avec des exemples.

Ces caractéristiques nous font conclure à une utilisation limitée des connaissances de niveau (n+p) de l'enseignante.

## D- Mise en relation des résultats de comparaison des discours et des manuels et conclusion

Nous abordons la dernière partie de ce chapitre III. Deux paragraphes la constituent. Le premier rappelle les grandes lignes des comparaisons, le deuxième est réservé à une synthèse.

### 1- Mise en relation des résultats obtenus pour chaque discours

Nous limitons la mise en relation à une juxtaposition des résultats obtenus pour chacune des enseignantes. Nous avons dégagé 4 thèmes qui constituent 4 parties dans lesquelles nous précisons ce qui caractérise chaque enseignante. A la fin de ces rappels, nous dressons un petit tableau de résumé.

#### *1.1- Structure et chronologie des discours*

Nous observons trois comportements différents dont deux sont comparables.

La première partie de la séance de la première enseignante (titre et contenu) correspond exactement à un titre et à un contenu du manuel. La deuxième partie n'est pas identifiable à un contenu du manuel ni le titre à un de ceux du manuel. Cependant, ce titre et ce contenu semblent être un réarrangement du texte du manuel. Les titres des parties qui suivent dans le cours et dans le manuel sont très proches. Nous avons donc conclu que la chronologie et la structuration adoptées sont inspirées de celles du manuel.

La deuxième enseignante n'adopte pas la même chronologie que celle du manuel. Nous trouvons des passages qui correspondent à la partie «cours » du manuel, alternés avec des passages qui renvoient à la partie « activité ». Ainsi, il y a dans le cours de l'enseignante une succession différente c'est-à-dire une chronologie différente. De même que pour la chronologie, la structuration est différente de celle du texte du manuel. L'enseignante propose des rappels, des définitions, des applications de ces rappels et définitions puis des propriétés suivies elles aussi d'applications. Le texte de la partie « cours » du manuel distingue « définitions », « angles particuliers » puis « propriétés ».

La séance de la troisième enseignante commence par des corrections d'exercices de résolution d'équations. Pour la suite de la séance, nous avons constaté une structure semblable à celle du manuel puisque propriétés et exemples se succèdent de la même façon. Par ailleurs, la chronologie de l'ensemble de la séance est identique à celle du manuel puisque les corrections d'exercices révèlent une première partie consacrée aux équations et que la suite est réservée aux inéquations comme dans le livre. Le contenu nous montrera des différences.

Entre les trois enseignantes, nous observons deux comportements différents :

- une chronologie semblable à celle du manuel,
- une chronologie différente de celle du manuel.

La première et la troisième enseignantes adoptent le même comportement à propos de la chronologie de leur séance : comparable à celle du manuel. Sur ce point, l'attitude de la seconde enseignante est différente puisque la chronologie de sa séance semble beaucoup plus personnelle, moins comparable au manuel.

La structuration rassemble aussi la première et la troisième enseignante puisque nous constatons pour elles-deux une ressemblance à celle des manuels de leur classe. De même que pour la chronologie, la structuration adoptée par la seconde enseignante est différente de celle du manuel. E2 se distingue ici aussi de l'attitude adoptée par les deux autres enseignantes face au manuel.

### *1.2- Contenus*

Dans l'ensemble, pour les trois enseignantes le contenu des séances est très lié à celui des manuels. Cependant, la comparaison de leurs détails à ceux des manuels laisse apparaître des différences.

Pour la première enseignante, nous avons constaté une adoption de certains points du manuel et l'apport d'autres contenus apparemment inspirés de ceux du manuel. Que ces contenus soient adoptés ou inspirés du manuel, ils sont très développés. Du point de vue des objectifs poursuivis, la présentation que l'enseignante effectue des apports laisse une marge floue. Malgré ce flou, l'objectif que nous pouvons attribuer au texte du manuel est le même que celui annoncé par l'enseignante : l'utilisation des racines carrées. Nous concluons de ces constats que l'enseignante a tendance à adhérer au contenu du manuel et qu'elle gère de façon maladroite les moments où elle s'en écarte.

Concernant la deuxième enseignante, nous pouvons dire que le contenu du manuel correspondant à la partie observée est totalement présent dans le cours. Il est largement complété. Nous y trouvons les mêmes objectifs. Toutefois, les éléments de connaissances ne sont pas présentés de la même manière et ne semblent pas déplacés par rapport à l'objectif de la séance. Il en est de même pour ceux qui sont apportés en supplément. Les applications ne se font pas de la même manière et les conclusions (légitimes) qui en sont déduites ne sont pas celles indiquées par le manuel. Nous pouvons conclure ici à une certaine indépendance de l'enseignante face au contenu du manuel, à une personnalisation du cours et à une gestion correcte de l'ensemble.

La troisième enseignante indique aux élèves les mêmes objectifs que ceux du chapitre correspondant du manuel. Certaines associations entre différentes connaissances effectuées par l'enseignante se trouvent aussi dans le manuel. Cependant, le "texte" du discours de l'enseignante est bien différent de celui du manuel. Les thèmes abordés par le texte de la partie « cours » du manuel et ceux abordés par l'enseignante sont identiques. Leur contenu est vu différemment par l'enseignante. Nous ne pouvons pas identifier les interprétations des propriétés que l'enseignante effectue aux textes qui les présentent dans le manuel. De même, certains éléments qu'elle met en valeur ne sont pas exactement ceux du manuel. Les exemples donnés en illustration ne sont pas du tout les mêmes que ceux donnés en illustration des propriétés similaires dans le manuel.

Notre conclusion pour la troisième enseignante est qu'elle semble prendre en compte le texte du manuel mais qu'elle ne se limite pas à le retransmettre tel quel.

Globalement, nous observons pour les trois enseignantes le même comportement : transmettre aux élèves le contenu du manuel. Ce comportement est associé à un réflexe commun : compléter le contenu du manuel. Cependant, ce comportement est à relativiser. Le complément apporté

n'est pas de même nature suivant les enseignantes. La première donne l'impression de vouloir alléger le contenu du manuel en remplaçant des parties par d'autres plus simples qui en sont inspirées. La façon dont ce remplacement a été effectué pour le cours observé peut conduire à une perte de richesse du texte initial. La seconde enseignante semble compléter qualitativement le contenu du manuel. Nous interprétons le discours de la troisième enseignante comme un nouveau façonnage du contenu du manuel. Ce façonnage donne une meilleure qualité conceptuelle au texte du manuel mais s'en écarte peu.
Finalement, nous avons l'impression que la première et la troisième enseignantes admettent comme bases de connaissances à acquérir pour les élèves le contenu du manuel puis transforment ce contenu. Cette transformation s'effectue suivant leurs connaissances propres (d'où intervention des connaissances (n) et (n+p)) et certainement suivant d'autres éléments auxquels nous n'avons pas eu accès (représentation de la classe...). Les connaissances de niveau (n+p) de la troisième enseignante interviennent davantage que celles de la première. La seconde enseignante donne l'impression de considérer comme base de la séance ses connaissances propres auxquelles elle intègre le contenu du manuel. De cette façon, les connaissances propres interviennent peut-être davantage que pour les deux autres enseignantes.

### *1.3- Les modifications : suppressions ou ajouts.*

La première enseignante supprime certaines parties du texte du manuel en les remplaçant par des parties que nous avons pu relier à certains points abordés ailleurs dans le manuel. Ces modifications ne se traduisent pas par un changement des objectifs de l'enseignante par rapport à ceux du manuel. Elle déclare aux élèves le même objectif que celui du manuel. Ce qui change dans un premier temps est l'outil mis en œuvre pour cet objectif. C'est d'ailleurs dans ce changement que nous avons constaté une incohérence puis une maladresse.

Par rapport au texte du manuel, nous constatons dans la séance de la seconde enseignante la suppression des deux premiers points de la partie « activités » du manuel. Tout se passe comme si elle les avait remplacés par deux autres directement liés au contenu de ce qu'elle propose aux élèves. L'exemple de la première partie du « cours » du manuel n'est pas reproduit mais le même triangle support permet à l'enseignante de contextualiser en partie les rappels de vocabulaire et de définitions. Certains mots de vocabulaire rappelés par l'enseignante sont indiqués par l'exemple du manuel mais des précisions supplémentaires sont apportées. La similarité des points de son discours et du texte du manuel que nous évoquons peut s'expliquer par l'identité de sujet abordé.

Nous avons constaté dans le discours des rappels de l'année scolaire passée auxquels aucun passage du manuel ne pouvait être associé. D'autres notions et remarques sont introduites. Les propriétés abordées ne sont pas établies de la même façon par le manuel et l'enseignante.

Le texte du manuel utilisé par la classe de la troisième enseignante présente deux parties pour chacun des thèmes « équations » et « inéquations ». La première présente des propriétés, la seconde des conséquences. Dans la séance de l'enseignante, nous ne trouvons pas de partie « conséquences ». Les résultats énoncés par le manuel dans chacune des deux parties se retrouvent entièrement dans la seule partie du « cours » de l'enseignante. La formulation est totalement différente. L'enseignante apporte beaucoup d'explications ponctuelles supplémentaires, utilise des termes différents de ceux du texte du manuel, propose des démonstrations non présentées dans le manuel et introduit des méthodes.

En conclusion, de même que pour les deux premiers points, nous constatons une pratique semblable chez la première et la troisième enseignante : supprimer et reformuler certaines, voire toutes les, parties du manuel. Un élément important différencie les deux enseignantes : la qualité du résultat. La première enseignante "dilue" le contenu du manuel, la troisième "condense" le contenu du manuel. De la sorte, il peut s'ensuivre une "perte" d'information pour la première et au contraire, la possibilité d'en "donner" davantage (au moins pour certains élèves) pour la troisième enseignante.

Pour la seconde enseignante, il est difficile de parler de suppression ou d'ajout par rapport au texte du manuel puisqu'en fin de compte, tout est supprimé et est présenté autrement. Cette façon de procéder permet à l'enseignante d'en "rajouter" mais différemment de la troisième enseignante puisque le contenu final est moins lié au texte du manuel. Cela nous a aussi permis de constater l'utilisation des connaissances de niveau (n+p) de l'enseignante.

### *1.4- Conséquences dans le discours des enseignantes de la participation des élèves*

Dans l'ensemble, pour chacune des trois enseignantes, les élèves participent beaucoup. Ils posent souvent des questions et font des commentaires. Leur prise en compte diffère d'une enseignante à l'autre.

Les élèves de la classe de la première enseignante semblent utiliser un vocabulaire ressemblant à celui du manuel et dans lequel beaucoup de termes sont "mathématiquement corrects".

Quand les élèves interviennent, nous avons remarqué trois attitudes de l'enseignante.

1- Parfois alors que les élèves qui prennent la parole s'expriment à l'aide d'un vocabulaire "mathématiquement correct", l'enseignante répond sur les mêmes thèmes en s'exprimant dans un vocabulaire plutôt familier.

2- Lorsque certains problèmes, vraisemblablement non attendus par l'enseignante, sont abordés par des questions d'élèves (au cours d'une résolution d'exercice ou suite à des propos de l'enseignante), l'enseignante répond en supprimant l'objet de la difficulté.

3- Certaines interventions d'élèves constituent des réponses correctes aux questions de l'enseignante, elles ne semblent pas être celles attendues, l'enseignante les remplace par ce qu'elle attendait vraisemblablement.

Finalement, tout se passe comme si la première enseignante suivait "fidèlement" les contenus de deux sources : le texte du manuel et celui de ses préparations en développant beaucoup certains de ses propos, plus rarement ceux des élèves. Les deux sources de l'enseignante semblent contraignantes puisque des éléments correctement abordés par les élèves n'ont que peu, voire pas, d'écho dans ses propos et ne la font pas s'écarter de ses sources. Nous concluons donc à une certaine difficulté de l'enseignante à s'adapter aux élèves quand il s'agit pour cela de modifier ses préparations.

Lorsque les élèves de la classe de la seconde enseignante prennent la parole, nous remarquons une écoute de l'enseignante ainsi que des corrections apportées à leur vocabulaire.

Puisque le contenu du discours n'est pas celui du manuel, nous ne pouvons pas commenter le rôle que les propos des élèves peut avoir dans le suivi du texte du manuel par l'enseignante. Cependant, nous pouvons remarquer deux choses.

1- Les interventions des élèves n'entraînent pas particulièrement l'enseignante à adopter le vocabulaire du manuel,

2- L'enseignante répond aux élèves en donnant de l'importance à leurs propos puisque certains sont intégrés aux rédactions des solutions des problèmes posés, même s'ils ne semblent pas ceux attendus par l'enseignante.

Nous constatons donc que l'enseignante n'écarte pas la participation des élèves au profit de textes préalablement établis (manuel, le sien propre).

L'enseignante adapte le contenu de sa séance aux élèves sans leur demander de s'adapter à sa préparation et sans adopter leur niveau.

La troisième enseignante prend en compte les élèves. Quand ceux-ci semblent ne pas comprendre, nous remarquons chez elle une tendance à utiliser les termes du manuel même si d'autres peuvent convenir. Il semble d'ailleurs qu'ils soient bien connus des élèves qui les utilisent fréquemment. Nous en concluons que la troisième enseignante s'écarte parfois de la préparation de sa séance au profit du contenu du manuel. Cette attitude montre que le manuel est une source importante pour la troisième enseignante.

### *1.5- Conclusion*

Résumé sommaire des résultats :

Voici un tableau qui résume rapidement les résultats de comparaison des discours et des manuels obtenus pour chacune des trois enseignantes dénommées E1, E2 et E3.

| | chronologie | organisation | contenu | élèves |
|---|---|---|---|---|
| E1 | identique | essentiellement identique Ce qui est différent est maladroit | essentiellement identique Ce qui est différent est maladroit | leurs propos entraînent E1 à ne s'en tenir qu'à sa préparation : elle se "replie" sur ses préparations |
| E2 | différente | différente | différent, reformulé et enrichi | E2 discute leurs propositions et les enrichit |
| E3 | identique | proche | différent, enrichi, composé avec d'autres connaissances | Leurs propos entraînent E3 à adopter leur vocabulaire qui est en partie celui du manuel. |

## 2- Conclusion-synthèse du chapitre III

Tout se passe comme si la première enseignante récitait en partie les résultats du manuel dans le même ordre et de la même façon. Elle ajoute des éléments qui apparaissent comme des liens entres ces résultats. L'ensemble, récit et ajout montre une vigilance insuffisamment exercée sur les connaissances liées aux contenus, des imprécisions pourraient être levées, il en résulte aussi un sentiment d'utilité limitée par rapport à l'objectif du cours. On peut avoir l'impression que l'enseignante s'interdit de consulter ses connaissances de niveau (n+p) en classe.

La deuxième enseignante construit les résultats du manuel dans un ordre différent et ne les dit pas de la même façon. Nous avons constaté des connaissances à l'œuvre dans les rapports aux élèves qui lui permettent de reconnaître d'autres connaissances dans leurs propos et d'adapter son discours. Cette adaptation s'est révélée indépendante du manuel et en lien avec les nouvelles connaissances introduites. Enfin, les propos tenus peuvent engendrer des développements susceptibles de conduire les élèves vers une vision plus globale et généralisatrice de leurs connaissances. Nous en concluons que l'enseignante utilise ses connaissances de niveau (n+p) pour la préparation du cours et qu'elles sont toujours présentes et efficaces en cours.

La troisième enseignante donne l'impression de reconstruire les résultats du manuel dans le même ordre mais ne les dit pas de la même façon. Des échanges avec les élèves nous ont montré qu'elle ne reconnaissait pas certaines de leurs incompréhensions ou bien ne "profitait" pas des occasions offertes pour préciser certains aspects de leurs connaissances. D'autre part, nous avons pu noter un privilège accordé au vocabulaire du manuel même si d'autres termes pouvaient être utilisés ou des développements effectués porteurs de généralisation. Ainsi que pour la seconde enseignante, nous dirons que tout se passe comme si l'enseignante utilisait ses connaissances (n+p), cette utilisation étant nuancée et plutôt réservée à ses préparations. La confrontation avec les élèves semble se traduire par un renvoi de ceux-ci vers le manuel, les connaissances (n+p) semblant présentes mais non impliquées.

Dans l'ensemble, pour les trois enseignantes, le manuel apparaît comme un élément important devant lequel leurs connaissances résistent différemment, plus le manuel semble présent en classe et surtout dans la préparation des cours, moins les connaissances des enseignantes semblent mobilisées.

# CHAPITRE IV

# CONCLUSION

## CHAPITRE IV : Conclusion

Traquer les connaissances mathématiques – autres que celles directement exposées – dans le discours des enseignants s'est avéré difficile pour les raisons (non exhaustives) suivantes :

- le nombre de séances observées par enseignante (une seule) est certainement insuffisant,
- le nombre d'enseignants observés (3) est certainement insuffisant,
- pour chacune des trois enseignantes, nous n'avons observé qu'une partie d'une notion abordée ; observer l'ensemble aurait, peut-être, été plus bénéfique,
- nous avons dû nous livrer à des interprétations de discours pour tenter de découvrir des implicites,
- nous ne pouvons pas savoir s'il y a des autocensures de la part des enseignants –nous supposons qu'il y en a effectivement,
- les connaissances ultérieures au niveau (n) peuvent être délayées et mélangées,
- il existe des contraintes dues aux programmes qui peuvent restreindre les possibilités d'action des enseignants,
- les enseignants se forgent des représentations qui peuvent restreindre leurs possibilités d'action en classe[3].

Concernant les derniers points, nous pouvons dire qu'il existe cependant des marges de manœuvre qui – elles – reposent directement sur les connaissances des enseignants. Par ailleurs, sans que ce soit lié ni à un professeur, ni à tous les contenus, ni à un niveau, en général on trouve sur certains contenus, à certains moments des utilisations différentes des connaissances mathématiques et des rapports différents aux manuels utilisés. Compte tenu de cette remarque, nous devons relativiser nos résultats.

Nous avons essayé de déterminer quelle était l'activité mathématique de trois enseignantes pendant la classe alors que les élèves se livraient, eux-aussi, à une activité mathématique. Nous détaillons ici ce questionnement en trois autres questions :

[3] Les enseignants débutants sont moins sujets que les expérimentés à cette situation

- y a-t-il deux activités mathématiques distinctes qui ne se répondent pas ?
- y a-t-il deux activités mathématiques qui se répondent en se complétant ?
- n'y a-t-il qu'une seule activité mathématique ?

En règle générale, nous souhaitons que la réponse à la deuxième question soit positive. En effet cette réponse signifie, pour nous, que les enseignantes ont utilisé leurs connaissances sur les concepts pour faire avancer les connaissances des élèves, que les enseignantes ont utilisé les possibilités dont elles disposent de faire apparaître du générique, du général pour accompagner les constructions de connaissance des élèves. Nous considérons que la vérification de cette hypothèse se traduit en termes de connaissances de la façon suivante : les enseignants peuvent utiliser certaines de leurs connaissances de niveau (n+p) afin d'optimiser l'insertion dans les connaissances des élèves et la construction par les élèves des connaissances de niveau (n).

Nous avons réparti les discours des enseignantes en unités caractérisées par leur fonction, leur forme et leur relief. L'observation des répartitions obtenues pour chacune des enseignantes et la comparaison de ces répartitions nous ont montré les deux particularités suivantes :

1- Un point est commun au trois enseignantes : l'argumentation décontextualisée apparaît avec des fréquences proches pour chacune d'elles et suivant un relief (question, accompagnement, réponse) semblable pour les trois enseignantes.

2- Un point constitue une divergence entre les trois enseignantes : l'information contextualisée apparaît avec un relief très différent. Les enseignantes E1 et E2 questionnent les élèves plus fréquemment que E3 sur des contenus d'information contextualisée. Au contraire, dans ses questions aux élèves, E3 fait plus souvent intervenir l'information décontextualisée. En terme de répartition du discours, le traitement de l'information (tant du point de vue de la forme que du point de vue de la façon dont l'information est adressée aux élèves) distingue assez nettement les enseignantes entre elles.

La répartition globale des unités de discours entre fonction, forme et relief ne distingue pas particulièrement les enseignantes entre elles. Au contraire, le détail contribue à cette distinction. Seul l'aspect décontextualisé des connaissances que les élèves ont à construire reflète cette apparente ressemblance d'ensemble des discours : l'argumentation décontextualisée semble vouloir dire que, dans l'ensemble, les enseignantes ont le même souci de faire effectivement apparaître en classe ce que les élèves ont à acquérir… ; nous pouvons estimer cette caractéristique souhaitable.

Contrairement à la forme et la fonction, la répartition globale du relief du discours distingue les trois enseignantes entre elles : la façon de s'adresser aux élèves a une place différente suivant les enseignantes. Nous trouvons ici une distinction dans la façon de présenter les connaissances aux élèves : pouvons-nous conclure que le milieu dans lequel se trouvent les élèves s'en trouve modifié ? Si nous n'en tirons pas de conclusion sur les connaissances propres des enseignantes, liée au relief du discours, nous prétendons cependant pouvoir affirmer que l'adaptation des enseignantes aux élèves va différer entre elles trois.

De fréquentes apparitions d'aspects particuliers (contextualisés) des propos des enseignantes liés à des fonctions différentes du discours, et portés par un relief spécifique, nous ont montré que les enseignantes ne géraient pas leur classe de la même façon. Nous avons pu en déduire des accès différents à leurs propres connaissances.

Du côté des enseignantes observées, l'analyse des passages décontextualisés nous a permis de mettre en évidence que les enseignantes avaient parfois des difficultés :

1- à changer de point de vue,
2- à ne pas se substituer aux élèves,
3- à ne pas tout dire, tout expliciter,
4- à faire des liens,
5- à expliquer et expliciter des "modèles".

Nous avons (heureusement) constaté que ces points ne mettaient pas toujours les enseignantes dans l'embarras : une version positive est aussi vraie même si elle n'est pas aussi fréquente.

Nous avons pris en compte les conséquences produites par les propos des élèves sur les discours des enseignantes. Cela nous a conduit aux constats suivants.

1- La première enseignante traduit les connaissances qu'exposent les élèves en des termes souvent restrictifs, elle limite leur champ d'action à des situations particulières (très contextualisées). Les réponses qu'elle apporte aux problèmes posés consistent fréquemment à effacer les difficultés soulevées et à dire ce qu'elle attendait. Tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule et même activité mathématique en classe pour l'enseignante et les élèves, que l'enseignante aurait prévu dans sa préparation du cours.

2- Nous observons une attitude contraire chez la seconde enseignante. L'enseignante traduit les connaissances qu'exposent les élèves en des termes plus généraux, elle relie fréquemment le particulier au général (dans la mesure des savoirs de la classe de Troisième). Elles répond aux élèves sans effacer les difficultés soulevées, elle conduit les élèves à comprendre et entrevoir les processus des raisonnements à tenir, enfin elle ne dévoile pas les résultats attendus. Tout se passe comme s'il y avait deux activités mathématiques en classe qui se répondent : celle de l'enseignante et celle des élèves. L'activité de l'enseignante nous a semblé préparée et l'enseignante paraissait pouvoir l'adapter aux situations de classe.

3- L'attitude de la troisième enseignante est intermédiaire entre ces deux schémas. L'enseignante traduit les connaissances qu'exposent les élèves en des termes plus généraux, elle juxtapose – sans les relier – le général et le particulier. Elle répond aux élèves sans dévoiler systématiquement les résultats attendus mais elle ne conduit pas les élèves à saisir les processus des raisonnements attendus, elle leur propose directement les "modèles" qu'elle voudrait les voir construire. Elle crée de la sorte un "saut" que les élèves doivent effectuer. Tout se passe comme il y avait en classe deux activités mathématique qui ne se répondent pas : celle de l'enseignante et celle des élèves. L'activité de l'enseignante nous a semblé préparée, toutefois l'enseignante n'a pas toujours réussi à l'adapter aux élèves.

Nous avons mesuré l'influence du manuel sur le discours des enseignantes. Nous avons constaté que ce document présente une importance variable pour chacune des enseignantes, cependant aucune ne semble l'ignorer totalement. Nos comparaisons entre le discours et le manuel nous ont permis d'établir les constats suivants :

1- Le manuel semble être le seul représentant des connaissances à acquérir pour la première enseignante. Tout se passe comme si elle copiait le manuel en tentant parfois de le simplifier. Pour les parties non simplifiées, le contenu est exposé par l'enseignante tel qu'il figure dans le manuel sans références à des raisonnements ou à des connaissances nécessaires à mettre en œuvre pour la réalisation des tâches proposées. En particulier, la validité d'une relation numérique n'est pas clairement établie pour tout triangle équilatéral. Nous avons repéré des maladresses dans les parties simplifiées susceptibles d'entraîner des confusions chez les élèves.

2- Le manuel semble être un accessoire pour la constitution du cours de la seconde enseignante. La structure du chapitre correspondant au cours est modifiée, le texte est enrichi, des passages sont même supprimés. Les apports sont représentatifs des connaissances que nous espérons retrouver chez les élèves et ne sont pas hors de leur portée, leur insertion dans les connaissances déjà en place des élèves semble bien accompagnée par le discours de l'enseignante.

3- La troisième enseignante utilise, elle-aussi, le manuel. Son utilisation se situe – comme pour les réponses aux élèves – entre les deux utilisations précédentes. Tout se passe comme si le contenu du manuel était reformulé sans être simplifié. La structure est conservée et le texte du manuel – en particulier le vocabulaire – semble être un recours auquel l'enseignante se réfère dans les moments où les élèves ne semblent pas comprendre ce qu'elle dit.

D'un point de vue très général, nous avons constaté que les enseignantes préparaient leurs cours et mettaient certainement en œuvre des connaissances de niveau (n+p) lors de cette préparation. Nous trouvons des empreintes plus ou moins substantielles des manuels dans ces préparations. Les comparaisons des discours aux manuels ont laissé apparaître des traces de connaissances autres que celles des élèves, plus ou moins importantes. Les références aux connaissances propres aux enseignantes ont ainsi semblé plus ou moins aisées. Nous en inférons que lors des préparations, les connaissances de niveau (n+p) constituent des références variables pour les enseignantes : le manuel semble exercer une grande influence et parfois bloquer ces références.

L'étude des discours établie indépendamment de la comparaison au manuel nous a montré qu'il y avait souvent des références fortes aux textes de préparation des enseignantes. Ces références constituant parfois un handicap : nous avons constaté une adaptation variable des enseignantes aux élèves ; les références aux connaissances de niveau (n+p) sont abandonnées, adaptées ou strictement conservées suivant les enseignantes.

Finalement, il semble se dégager les constats suivants :

- plus le manuel est présent lors des préparations moins les enseignantes réussissent à s'en écarter en classe,

- les trois utilisations du manuel nous ont montré qu'il apparaissait comme un modèle plus ou moins discutable et qui se substitue plus ou moins aux connaissances des enseignantes. Ainsi, les connaissances de niveau (n+p) sont écartées plus ou moins fortement. Dans l'ensemble, nous constatons que le manuel intervient à différents niveaux pour les enseignantes, il influence la qualité des discours. Il s'est révélé être un outil efficace pour notre recherche : nous pouvons ici conclure que la "fidélité" au texte des manuels se traduit par une utilisation inversement proportionnelle des connaissances propres des enseignantes.

La répartition du discours en forme, fonction et relief nous a permis de dresser une allure générale des cours en donnant une première caractéristique de l'utilisation des connaissances de niveau (n+p) des enseignantes. L'analyse des passages décontextualisés nous a permis d'approfondir et de préciser cette caractéristique. La comparaison au manuel s'est avérée décisive.

En somme on ne peut pas en conclure formellement à l'oubli ou l'absence des connaissances (n+p) ; on peut seulement supposer que c'est la gestion du cours adoptée par l'enseignant, le mode de réponse à la pression des élèves notamment qui sont associés assez étroitement à des utilisations différentes de ces connaissances. Bien que nous ayons affaire à des débutants, nous ne pouvons pas savoir ce qui est "premier" dans cette relation. Est-ce que les connaissances ne sont pas assez disponibles ? Est-ce que la représentation des "besoins" des élèves est trop minimaliste ? Est-ce que disponibilité des connaissances et de la gestion vont ensemble ? De plus, aussi bien pour les préparations que pendant la classe, il y a un intermédiaire qui semble déterminant dans cette affaire : c'est le manuel. A l'épreuve du feu, les enseignantes étudiées ont ainsi adopté plusieurs modes :

- soit suivi fidèlement le manuel en reléguant quelque part les connaissances (n+p), cette fidélité se marquant aussi bien pendant la préparation que pendant la classe, gérée de manière quasi "technique", avec une majoration du contextualisé technique,

- soit pris quelques distances avec le manuel, grâce à ces connaissances (n+p) notamment dont on voit des traces aux deux niveaux (préparation du cours et déroulement en classe) non techniques. Dans ce cas, on a trouvé plusieurs manières de faire intervenir les savoirs ultérieurs ; en les faisant partager le plus possible aux élèves, y compris sur le mode générique, avec une gestion très disponible, très souple. Ou alors, en les définissant comme borne "supérieure" des savoirs qu'on peut espérer faire partager aux élèves, avec une gestion moins souple, plus bipolaire (cas particulier/cas général), peut-être plus discriminante entre élèves. Il s'agit plus de montrer ces savoirs comme référence abstraite fonctionnant en recette (modèle) que de les faire partager (comme préconcept éventuellement) sauf pour les élèves qui s'en emparent assez vite.

Finalement, les connaissances mathématiques (n+p) sont donc ou ignorées (reléguées) ou montrées (comme concept, générales) ou intégrées, peut-être à un niveau intermédiaire (préconcept, générique).

Mais qu'en sera-t-il les années suivantes ?

Comment l'expérience va-t-elle intervenir dans ces différentes gestions ? L'hypothèse de cohérence et de stabilité des pratiques (cf. Crahay, Robert) nous amène à proposer l'idée que l'expérience ne va pas en général radicalement changer ces choix. Dans cette configuration, on perçoit l'importance d'attirer l'attention des futurs enseignants sur ce point, de travailler avec précision sur les manuels, et de s'interroger constamment sur l'état de la classe notamment quant au particulier, générique, général et sur le long terme. Ceci est très lié à la reconnaissance du rôle du temps dans la construction des connaissances. D'une certaine manière les enseignantes 1 et 3, l'une qui se réfugie dans les applications et le particulier, l'autre qui juxtapose le "modèle" général et le particulier, ne laissent pas toute sa place au temps, alors que l'enseignante 2 par sa souplesse et son recours éventuel au générique, laisse plus la place peut-être, à une construction longue des notions. Sortir victorieux de l'épreuve du feu serait peut-être, pour "nos" enseignants savoir attendre, en étant vigilant, pour reconnaître des occasions d'utiliser les connaissances (n+p) et les distiller au bon moment, même pour ne faire construire que des préconcepts.

## BIBLIOGRAPHIE


Assude, T. (1993-94) Ecologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum, *« petit x »* n° 35.

Bessot, A. Le Thi Hoai An (1993-94). Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée *« petit x »* n°36.

Bittar, M. (1999-00) Les vecteurs a l'issue de la seconde, une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves *« petit x »* n°52, pp. 49 à 68.

Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, détermination d'un milieu-connaissances et savoirs, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol.19.2, La Pensée Sauvage Grenoble.

Bronner, A. (1997) Les rapports d'enseignants de Troisième et de Seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 17.3

Charlot, B. (1997) Du rapport au savoir, éléments pour une théorie, *Paris* anthropos Poche éducation.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Comiti, C. Grenier, D. Margolinas, C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, *Différents types de savoirs et leur articulation,* La Pensée Sauvage Grenoble.

Conne, F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 12,2.3 La Pensée Sauvage, Grenoble.

Crahay, M. (1989) Contraintes de situations et interactions maître-élèves : changer sa façon d'enseigner est-ce possible ? *Revue Française de Pédagogie, 88*

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 7.2

Hache, C. Robert, A. (1997) Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe ? *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol 17,3 La pensée Sauvage, Grenoble.

Keitel, C. (1988) Le rapport entre savoir scientifique et savoir scolaire : éléments pour une discussion *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Noirfalise, R. (1997-98). Une étude sur le maniement d'énoncés dans une démonstration, *« petit x »*, n°46, pp. 5 à 17.

Robert, A. (1996) Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques, un essai de didactique professionnelle *Cahier de DIDIREM n°26*

Robert, A. (1997) Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire in Dorier J.L. et all. *l'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* pp. 149-157, éd. La Pensée Sauvage Grenoble.

Robert, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 18.2 La Pensée Sauvage Grenoble.

Robert, A. (1999) Pratiques et formation des enseignants. *Didaskalia, 15.*

Roditi, E. (1996) La racine carrée en Troisième, étude d'une activité *Document de travail pour la formation des enseignants* n°17, IREM de Paris 7.

Rouchier, A. (1996) Connaissances et savoirs dans le système didactique *Recherche en didactique des mathématiques,* vol. 16.2 La Pensée Sauvage, Grenoble.

Tavignot, P. (1993) Analyse du processus de transposition didactique *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol. 13.3 La Pensée Sauvage, Grenoble

Verret, M. (1975) *Le temps des études,* Librairie Honoré Champion, Paris.

Horaires/Objectifs/Programmes/instructions classes des collèges, *6^e^*, *5^e^*, *4^e^*, *3^e^*.

Math 3^e^, Edition Belin 1993.

Math 3^e^, Edition Nathan 1993 Collection Transmath.

Math Irem de Strasbourg 3^e^ Hachette livre 1993.

**UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT**

**Ecole doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »**

***Année 2000-2001***

***THÈSE***

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

**SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

présentée et soutenue publiquement
par

Chedlia BEN SALAH BREIGEAT
Le 21 Décembre 2001

**Titre :**

# Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas

**ANNEXES**

**Directeur de thèse : Aline ROBERT**

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **Mme ROBINET Jacqueline** | Maître de conférence Université Paris 7 | Président |
| **M. COLOMB Jacques** | Professeur INRP Paris | Membre |
| **Mme LABORDE Colette** | Professeur IUFM de Grenoble | Rapporteur |
| **M. PARZYSZ Bernard** | Professeur IUFM d'Orléans-Tours | Rapporteur |
| **Mme ROBERT Aline** | Professeur IUFM de Versailles | Directeur de thèse |

# ANNEXES

Annexe 1 : Codage des unités de discours

Annexe 2 : Transcriptions codées des discours des enseignantes E1, E2, E3 et de leurs élèves

Annexe 3 : Une petite analyse de trois manuels scolaires de la classe de Troisième

## Annexe 1 : Codage des unités de discours

- La forme sera indiquée par un texte en caractères gras ou non gras suivant l'aspect **décontextualisé** ou contextualisé des interventions.

- La fonction sera repérée par deux lettres en marge droite du texte. La première lettre indiquera la fonction de référence : A pour argumentation, I pour information et S pour structuration. La deuxième lettre indiquera l'une des "sous-fonctions" que nous avons déterminées : AC, AP et AM en argumentation, IC, IT IA et I divers en information enfin SR, SB et SE en structuration.

- Le relief sera indiqué par une disposition du texte aligné sur la marge gauche ou en retrait de la marge ainsi que des logos :

o réponse

• accompagnement

♦ question

Les propos des élèves seront repérés par une disposition en retrait de la marge gauche du texte et seront ~~barrés~~.

## Annexe 2 : Transcriptions codées des discours des enseignantes et des élèves

## Discours de l'enseignante E1

| | |
|---|---|
| • **On avait vu avant de partir le calcul de la diagonale d'un carré** | SB |
| • **et on avait commencé à calculer la hauteur dans un triangle équilatéral.** | SB |
| ~~calculer AH~~ | |
| • Alors vous savez | non classé |
| ~~On avait marqué AB c'est un demi de~~ | |
| o voilà | IC |
| il s'agissait de | non classé |
| ~~y'avait un deuxième a madame~~ | |
| ~~(inaud)~~ | |
| • Il s'agissait de calculer | SB |
| ~~AH~~ | |
| o AH | IC |
| ~~y'avait trois a, trois petits a~~ | |
| Ne parlez pas tous à la fois, Xavier | autre |
| ~~Sur le dessin y'avait trois petits a~~ | |
| (inaudible) triangle équilatéral. | non classée |
| ♦ Alors qu'est-ce que, qu'est ce qu'on a dit qu'on allait utiliser pour calculer la hauteur AH Ermine ? | AC |
| ~~par le théorème de Pythagore~~. | |
| o Voilà on pourra utiliser le théorème de Pythagore alors | IC |
| ~~c'est un demi de CB~~ | |
| o Voilà | IC |
| ♦ alors ça vaut combien HB ? | IA[1] |
| ~~Ben la moitié de a~~ | |
| ~~a divisé par deux~~ | |
| ♦ Alors je vais l'écrire comment ? | notation I |
| ~~a sur deux~~ | |
| ~~a demi~~ | |
| ~~a sur deux~~ | |
| o Voilà a sur deux | IC |

[1] Cette question est une demande de résultat, c'est pourquoi nous la classons en information application. Ce qui nous fait dire qu'il y a une ambiguïté est que l'enseignante pose la question qui correspond à la réponse qu'un élève vient de donner et qui n'a pas de lien direct avec ce qui est en train de se dire. Ainsi c'est une application qui n'a pas même été suggérée. Suite à cette intervention d'élève, l'enseignante change de sujet en enchaînant sur ce que dit l'élève et poursuit comme si elle reprenait un résultat déjà établi tout en donnant l'impression qu'il ne l'a pas été puisque la justification de ce passage sera longue et laborieuse.

♦ pourquoi ? AP

~~Parce-que (inaudible) la moitié parce que la hauteur coupe en demi~~

o Oui IC

♦ pourquoi ? AP

~~(inaudible) équilatéral (inaudible)~~

**o Voilà dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi** **IC**

~~Médiane~~

**o Voilà médiane** IC

**♦ et ?** **propriété IT**[2]

~~Médiatrice~~

**o et médiatrice voilà** **IC**

o donc automatiquement ici H va être le milieu de CB AP

o donc ici la haut... la distance HB c'est bien a sur deux. répétition IC

• On va écrire donc première chose, on va dire que H est le milieu de CB. SE

**• Alors dans un triangle équilatéral ... la hauteur... issue d'un sommet... est aussi**

**propriété IT**

~~Médiatrice~~

**o Voilà la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du coté opposé oui.** **répét., propriété IT**

~~Donc CH égal HB~~

Pardon ? non classé

~~CH égal HB~~.

CH ? non classé

o Oui CH égal HB c'est ça. IC

**• Puisque la hauteur est aussi médiatrice, ça veut dire qu'elle coupe** **répétition AP**

~~Le segment~~

o Oui le segment BC IC

~~en son milieu~~

o en son milieu voilà. IC

• Donc la hauteur issue de A coupe le segment [BC] en son milieu H... propriété IT

• Donc on a CH égal HB, CH égal HB égal IA

---

[2] Nous pourrions classer cette intervention en AP (puisque c'est la suite d'une explication) mais la question du pourquoi a déjà été posée, les élèves y ont répondu et l'enseignante a déjà accepté leur réponse ("voilà") en la répétant ("médiane"). Ainsi, l'explication attendue est donnée. La volonté de compléter la propriété avec la question "et ?" est un supplément et nous laisse penser que l'enseignante vérifie la connaissance que les élèves ont sur ce point. Ceci motive notre classement IT, même si par la suite, c'est la qualité "médiatrice" de la hauteur qui sera retenue et non médiane qui était suffisante.
Remarquons qu'il peut y avoir là une volonté de l'enseignante de laisser l'idée qu'il y a non seulement une propriété avec le milieu mais qu'il y a en plus la perpendicularité propre à toute hauteur.

~~a demi~~

~~a sur deux~~

o a sur deux ou on dit un demi de a mais on ne dit pas a demi. terminologie I

• Donc on a trouvé la longueur HB SE

• donc maintenant, on n'a plus qu'à calculer AH. SE

♦ Alors on va utiliser Hubert tu termines, avec quoi on va pouvoir calculer AH ? AC

~~AB moins HB~~

♦ Alors on utilise ? répétition AC

~~avec Pythagore~~

♦ Oui ou ? (Oui où ?)[3] AC

~~La réciproque~~

~~ouais la réciproque~~

~~Thalès~~

~~ou les racines carrées (inaudible)~~

o Non dis pas n'importe quoi appréciation I

et puis si tu as quelque chose à dire, tu lèves la main autre

♦ Alors on utilise le théorème de Pythagore ou sa réciproque ? AC

~~Le théorème de~~

**o Oui le théorème de Pythagore. IC**

**• Le théorème de Pythagore va servir à calculer une longueur alors que la réciproque elle sert à montrer que le triangle est rectangle. AC (ou AM)**

• Attention alors là on a deux longueurs, on peut calculer la troisième donc c'est Pythagore. AM

♦ Mais où pourquoi est ce qu'on peut utiliser le théorème de Pythagore ? AP

~~y a un angle (inaudible)~~

~~parce qu'il est rectangle~~

o parce-qu'il y a le triangle rectangle IC

~~ah~~

♦ Alors ? AC

~~alors on fait AB au carré moins HB au carré et on obtient HA~~

o D'accord IC

• Alors on va l'écrire. SR

[3] L'enregistrement ne permet pas à ce niveau du discours de décider s'il s'agit de « ou » conjonction de coordination ou bien « où » préposition de lieu. Les interventions (notamment des élèves) qui suivent nous font opter pour la première solution. Cependant, le classement de cette unité de discours ne change pas qu'il s'agisse de l'une ou de l'autre.

◆ Alors donc dans le triangle rectangle AHB, dans le triangle rectangle AHB, d'après le théorème de Pythagore on a quoi ? IA

**o la somme des carrés des côtés égal le carré de l'hypoténuse. propriété IT**

o Dans le triangle AHB, d'après le théorème de Pythagore on a que AH carré plus HB carré égal AB carré... IA

• donc ensuite, on remplace. SE

• AH carré puisqu'on le cherche, ça bouge pas. AM

◆ HB carré ça va nous donner combien ? IA

~~On passe de l'autre côté, ça donne moins~~

o Euh oui d'accord IC

• on va d'abord remplacer après autre I[4]

~~a sur deux~~

◆ Oui alors comment tu l'écris ? (IA ou) AC

~~Ah ben non.~~

o a sur deux le tout au carré IA

◆ ça fait ? IA

~~a au carré sur quatre~~

~~ben on~~

o Oui ça fait a carré sur quatre IC

• alors on va l'écrire après SR

• égal donc AB carré a carré plus a carré donc sur quatre égal a carré IA

~~Madame pourquoi a carré à la fin~~ ?

o AB c'est au carré, AB vaut a donc AB au carré c'est a carré, AP

◆ Donc AH carré, AH carré Lucie ça vaut quoi IA

~~euh...~~

◆ Ici à la ligne d'après, je vais écrire quoi Landie ? répétition IA

~~a carré moins a carré sur quatre~~

o Oui a carré moins a carré sur quatre IC

~~C'est égal à~~

• Alors attention mise ne garde I

◆ ça fait combien a carré moins a carré sur quatre ? IA

~~Ben faut mettre sur le même dénominateur~~

**o Voilà faut mettre sur le même dénominateur. IC**

---

[4] l'enseignante a déjà parler une fois (5 lignes au-dessus) de remplacer. A cette occasion, nous avions classé l'intervention en SE. Ce qui nous fait classer le même contenu cette fois en I est le mot « d'abord » qui vient en réponse à l'intervention d'un élève et qui peut être interprété comme : « oui nous pourrions passer de l'autre côté mais il est préférable ici de remplacer avant de continuer les calculs... ». Ce n'est pas classé en AM (méthode) car il n'y a pas d'explication donnée à la raison du remplacement.

~~a carré~~

♦ Alors a carré je peux l'écrire aussi ? IA

~~a carré sur un~~

~~a carré sur a carré~~

~~a carré sur un~~

**o Oui a carré c'est la même chose que a carré sur un.** **IC**

~~Donc c'est égal à~~

o Voilà AH carré égal quatre a carré sur quatre moins a carré sur quatre voilà IA

o ça fait trois a carré. IA

♦ Alors maintenant si je veux AH. Parce que j'ai AH carré qui est trois a carré sur quatre, si je veux AH ? IA

~~Euh racine carrée de~~

o Oui racine carrée de 3a carré sur 4 IC

~~Pourquoi racine carrée ?~~

Pardon ? autre

♦ quand tu écris que x au carré vaut 25 d'accord, x vaut combien ? IA

~~5~~

♦ 5 tu as bien fait racine de 25 ? AC

~~Oui mais là on peut faire divisé par deux ah ben non.~~

o Non non, là je prends la racine. AC

♦ Oui alors au passage là est ce qui a pas quand j'écris euh attendez euh c'est ici alors est-ce que je peux simplifier là maintenant ? IA

~~Ben oui on enlève les carrés~~

~~si 4~~

o Alors attention mise en garde I

~~On enlève les racines carrés~~

~~ça fait 3a~~

~~c'est racine de 3~~

o Oui IC

♦ et j'en fais quoi ? IA

~~ça fait 3a carré~~

~~on le met devant~~

♦ Alors Caroline ? IA

~~3a sur 2~~

**o Pas tout à fait, on a vu quand j'ai, quand j'ai racine d'un nombre sur un autre nombre** **AP**

**♦ qu'est ce que je peux écrire que c'est quand j'ai racine de a sur b ?** **propriété** **IT**

| | |
|---|---|
| Je peux écrire | non classé |
| ~~Ah oui racine de a sur~~ | |
| o Alors c'est d'abord racine de 3a carré sur | IA + SE |
| ~~sur racine de 4~~ | |
| o Voilà c'est racine de 4. | IC |
| • La première propriété enfin une des propriétés. | IT |
| • Et ensuite quand j'ai... | (SE) |
| ~~ça fait racine de 3 fois racine de a carré~~ | |
| **• Oui alors j'utilise ici racine de a fois b** | **AC** |
| ♦ ça fait ? | IA |
| ~~Racine de 3~~ | |
| o Voilà racine de 3 fois racine de a carré sur | IC |
| • alors là je peux calculer maintenant | SE |
| ♦ ça fait ? | IA |
| ~~2~~ | |
| ~~Donc ça fait a sur racine de 3~~ | |
| ~~a racine de 3~~ | |
| o Alors racine de 3 | IC |
| ~~a carré~~ | |
| ♦ Racine de 3 est ce que je peux le simplifier ? | IA |
| ~~Non.~~ | |
| ♦ Racine de a carré ? | IA |
| ~~a~~ | |
| ~~oui~~ | |
| ~~a~~ | |
| ♦ Et alors quand j'ai racine de 3 fois a comment est-ce que je peux l'écrire ? | autre I[5] |
| ~~a racine de 3 sur 2.~~ | |
| o Voilà sur 2 d'accord. | IC |
| François ça va ? | autre |
| ~~Où il est passé le racine de a non le carré de a ?~~ | |
| ~~Le carré et la racine, ça se simplifie.~~ | |
| **o Alors on a vu quand tu prends, quand tu as un nombre au carré** | **AP** |

[5] cette question fait appel à la commutativité de la multiplication. L'enseignante utilise un vocabulaire rappelant la notation, l'écriture plutôt que la propriété de l'opération. C'est pourquoi nous classons cette intervention en I et non dans l'une des catégorie A.

o par exemple quand j'écris racine de 25, ça tu sais, ça vaut 5 mais 25 je peux l'écrire comme étant 5 au carré d'accord, AP

o **on obtient directement le nombre qui était élevé au carré** **AP**

♦ oui ? autre

**• Alors on a calculé pour le cas général. Quand on vous donne un triangle équilatéral de côté a, la longueur de la hauteur ici, d'un sommet au pied de la hauteur, ça fera toujours a racine de 3 sur 2. SB**

♦ Alors par exemple, quand je prends le triangle équilatéral de côté 5 combien vaudra la hauteur, une hauteur ? I énoncé

~~5 racine de 3 sur 2~~

• Voilà 5 racine de 3 sur 2 IC

♦ Si j'ai un triangle équilatéral de côté 6 ? I énoncé

~~6 racine de 3 sur 2.~~

• Voilà alors ça vaudra 6 racine de 3 sur 2 IC

♦ Est ce que je peux l'écrire mieux que ça ? IA

~~Si euh~~

♦ Karine ?

~~3 racine de trois.~~

• Voilà on peut simplifier ici donc ça fait 3 racine de 3, 3 racine de 3 d'accord IA

□ alors on va l'écrire donc en rouge hein. On va écrire en dessous en rouge. Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure SR

~~La hauteur mesure~~

♦ Alors est-ce que je peux dire la hauteur ? I terminologie

~~Ouais.~~

• Une hauteur hein les hauteurs y'en a trois IT définition

~~On peut pas l'écrire alors~~

~~Ah~~

• Une hauteur mesure a racine de 3 sur 2 IC

~~Eh madame, on marque, si vous, l'exercice, on marque la propriété~~

• Voilà IC

~~ah ouais~~

**• Comme ça vous n'avez pas besoin de refaire tous les calculs c'est comme par exemple dans la diagonale d'un carré, si vous avez besoin de calculer la diagonale d'un carré, si vous, citez la propriété directement plutôt que de réutiliser Pythagore etc., vous utilisez la propriété, vous avez directement le résultat.**

**AM**

~~Alors dans (inaudible) on fait dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure a racine de 3 sur 2~~

o Oui

~~Donc~~

o Donc tu auras, sa longueur sera égal à, tu auras à remplacer par les valeurs qu'on te donne. (Patrice tu veux dire quelque chose ? Non alors !) Voilà une propriété qui vous pourra vous être utile avec les racines carrées.

**• Alors maintenant donc les racines carrées, on a vu les applications à la géométrie SB**

**• et maintenant, on va voir les applications à la résolution d'équations du premier degré et du second degré. SB**

**• Alors c'est grand, c'est le grand 5. Grand 5 application à certaines équations. SB**

**• Alors équations du premier degré et après on verra du second degré. SB**

**◆ Quand je dis du premier degré, ça veut dire quoi Laurent, c'est des équations de quel genre ? définition IT**

~~(inaudible)~~

o **Avec une inconnue** **définition IT**

◆ **et ?** **définition IT**

~~x~~

o **Voilà y aura pas de carrés, y aura que des x** **définition IT**

(bruit)

**• Quand on sera au second degré, y aura des x carrés.** **définition IT**

• Alors premier exemple. SB

• La hauteur dans un triangle équilatéral mesure 5 centimètres. Trouver x la longueur du côté. énoncé I

(silence)

◆ Alors quelqu'un a une idée ? AP

~~C'est égal 5 (inaudible) sur 2.~~

o oui alors d'accord c'est ça IC

◆ mais si on met x la longueur du côté, qu'est-ce qui faut écrire, qu'est ce qu'on va écrire, on va écrire (inaudible) pas directement ? AP

~~Ben soit x la longueur du côté~~

◆ **Voilà alors, ça s'appelle une... ?** **définition IT**

◆ **une é... ?** **répét. définition IT**

~~équation.~~

o **Voilà on va essayer d'écrire une équation** **SE**

• alors pour trouver l'équation donc x représente le côté pour trouver l'équation, on doit calculer la hauteur en fonction de x d'accord et on sait qu'elle sera égal à 5 ainsi, on pourra écrire l'équation AM

~~Ah ouais~~

◆ **Alors si j'ai x le côté d'un triangle équilatéral, combien vaut la hauteur ?** **propriété IT**

~~La hauteur ?~~

o **Oui.** **IC**

~~Egal a racine de 3 sur 2.~~

o **Voilà** **IC**

• **donc on l'écrit ici, propriété... on commence par citer la propriété, dans un triangle équilatéral de côté x... la hauteur mesure x racine de 3 sur 2.** **SR**

~~Ah c'est général.~~

Hein ? non classé

~~La hauteur.~~

o **T'as trois hauteurs alors tu peux pas dire, dans un triangle tu as trois hauteurs, tu peux pas dire** **AP**

~~Ici c'est la même.~~

o **On dit la hauteur issue... une parmi les trois.** **AP**

◆ Alors une hauteur mesure x racine de 3 sur 2, dans le cas précis combien on peut calculer ? IA

~~5~~

o Voilà donc on va avoir donc hauteur x racine de 3 sur 2 égal 5. IC

◆ Ici comment fait-on pour résoudre ce genre d'équation ? AM

~~On fait 5 moins non est égal à zéro.~~

o oui on peut. IC

◆ On peut faire plus facilement. Cécile ? répétition AM

~~On fait x racine 3 par 2 est égal~~

o Oui d'accord IC

◆ est-ce que quelqu'un d'autre a une idée ? répétition AM

o Caroline voilà directement x racine de 3 égal 10 c'est ce que disait Cécile mais en plus simple. IC

o Ici lorsqu'on a une égalité, on réduit au même dénominateur de chaque côté AM

o donc ça nous donne x racine de 3 sur 2 égal 10 sur 2. IA

~~Pourquoi, comment ?~~

~~Pourquoi égal 10 ?~~

Pourquoi égal 10 ? autre

o Alors quand tu réduis au même dénominateur ici et là, 5 c'est comme si tu avais 5 sur 1, 10 sur 2 AP

◆ et comme j'ai le même, quelle est l'opération que je fais ? AP

◆ je multiplie toute l'équation par ? IA

~~2~~

o 2, je multiplie toute l'équation par 2. IC

o Donc je vais avoir x racine de 3 égal 10 (oui, non ?) AP

• Ici quand je multiplie toute l'équation par 2, 2 fois ça sur 2, il me reste x racine de 3 et 2 ça fait 10 (oui ?) AP

◆ Maintenant, qu'est-ce que donc ici ça fait, on multiplie par 2, on multiplie toute l'équation par 2 et maintenant ? (inaudible) AC

~~euh, ben euh racine de 3 c'est égal à 10...~~

o Non attention c'est x que je veux trouver donc là, ici je dois avoir x égal quelque chose mise en garde I

Caroline ? autre

~~diviser par racine de 3~~

o Oui x divisé par racine de 3 d'accord, x divisé par IC

~~On les a enlevé les deux ou pas~~

o **Oui on les a enlevés oui, parce que tu fais la même opération** **AP**

~~c'est une équation~~

o **Voilà, c'est une équation, tu fais la même opération des deux côtés.** **répét. AP**

• Donc 10 sur racine de 3 ici je divise par racine de 3 donc là je dois diviser par racine de 3 AP

◆ alors qu'est ce qu'on avait dit quand j'ai 10 sur racine de 3 ? autre I[6]

◆ **Est-ce que je peux laisser cette écriture là ?** **autre I**[7]

~~Non il faut, il faut enlever, il faut le mettre en haut~~.

o Alors faut mettre en haut IC

~~10 fois racine de trois~~

◆ Alors ? AC

~~On multiplie par racine et en bas on va avoir trois parce que c'est la racine de 3~~

o Oui mais le problème c'est que tout le monde ne comprend pas. IC

• **Alors comme je ne peux pas laisser de racine ici au dénominateur, je vais donc enlever ma racine ici,** **habitude I**

• multiplier au dénominateur par racine de 3, je vais multiplier ici au dénominateur par racine de 3 parce que quand j'aurais racine de 3 par racine de 3, ça donnera 3. Mais comme j'ai multiplié au dénominateur par racine de 3, je suis obligée aussi de multiplier au numérateur par racine de 3, ça on l'avait vu. AP

o Alors j'obtiens donc x égal donc 10 fois racine de 3, 10 racine de 3 sur 3. IC

~~On peut pas multiplier racine de 3...~~

o Oui tu peux multiplier euh écrire racine de 3 fois racine de 3 pour aller plus vite, IC

◆ racine de 3 fois racine de 3 ça fait quoi ? IA

~~3~~

o Voilà IC

~~3 carré.~~

◆ Donc quelle est ici la réponse au problème posé ? IA

---

[6] voir note 4
[7] idem

♦ Puisqu'on a fini notre calcul alors c'est effectivement la résolution de l'équation, elle représente quoi ? SB

~~La hauteur~~

• On est parti d'un problème au départ SB

~~Ça représente la longueur du côté~~

o Voilà vaut 10 racine de 3 sur 3 IC

~~C'est une des longueurs~~

**o Oui mais le côté c'est le même partout** **AP**

o donc la longueur, la longueur du côté du triangle équilatéral vaut 10 racine de 3 sur 3. IA

• Et alors centimètres l'équation n'a pas d'unité mais au départ on est parti de 5 centimètres. I

~~Madame mais pour avoir le vrai résultat parce que ça, on peut pas racine de 3 sur 3 sur la règle~~

o Ah ben voilà, ben oui mais si on te fait dessiner une hauteur de 5 centimètres, ça va à toi de reporter c'est possible, le triangle équilatéral et ben oui parce que sinon on peut pas le construire on peut pas parce que 10 racine de 3 sur 3 c'est pas une valeur exacte. AP

**♦ Alors qu'est-ce qu'on a oublié là ?** **habitude I**

~~Ben rien.~~

**♦ Si, c'est une équation** **habitude I**

~~La vérification~~

**o La vérification** **IC**

~~oh là là~~

~~Ah non~~

~~Madame tous les profs y font la vérification ?~~

♦ Alors, comment est-ce que je vais faire la vérification ? AM

~~Euh ben euh / 10 racine de 3 sur 3 multiplié par 5~~

o Non attention, ça c'est le côté IC

♦ qu'est-ce que je peux calculer avec le côté ? AC

~~La hauteur~~

o Oui la hauteur. IC

♦ Alors Caroline ? AC

~~10 racine de 3 sur 3 racine de 3 sur 2~~

o Alors ici j'ai mon côté, mon côté a, je sais que la hauteur va mesurer a racine de 3 sur 2 d'accord donc je vais calculer ça IC

♦ et si normalement je ne me suis pas trompée, à quoi je dois arriver ? AP

~~A 5~~

o A 5 (d'accord ?) IC

• De l'autre côté j'ai calculé x, avec 10 racine de 3 sur 3 donc je vais calculer ici le membre de gauche de l'équation et normalement je devrais trouver 5, le membre de droite AM

~~Parce que en fait 10 racine de 3 sur 3 ben c'est en fait a~~

o C'est a IC

~~Donc après à la place de a on met~~

o Voilà donc on utilise la propriété AM

• donc on va l'écrire même propriété hein on va pas la réécrire même propriété SR

• et donc on va avoir 10 racine de 3 sur 3 ça c'est a que je dois multiplier IA

~~Par racine de 3~~

o multiplier par racine de 3 sur 2 d'accord IC

• ça c'est le membre de gauche définition IT

• alors 10 racine de 3 sur 3 multiplié IA

◆ alors Jérôme IA

~~Non c'était pour savoir d'où venait le racine de 3 sur 2~~

o **Quand j'ai un côté d'accord un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure a racine de 3 sur 2 AP**

o **donc c'est a multiplié par racine de 3 le tout sur 2 ou alors a multiplié par racine de 3 sur 2 on est d 'accord AP**

o Ici combien y vaut mon petit a ben mon petit a, il est un peu compliqué, y vaut tout ça. Donc ça c'est a multiplié par racine de 3 sur 2 (oui ?) AP

~~Donc ça fait 10 racine de 3 fois 3 sur 6~~

o Attention mise en garde I

~~dix racine de 3 fois 3 sur 6~~

◆ Pourquoi fois 3 ? AP

(inaudible) racine de 3 non classé

~~Euh ah ouais !~~

o D'accord. IC

• Maintenant je préférerais que 3 fois 2 on va pas le calculer AC

~~Ouais 10 racine de 9 sur 6.~~

◆ Alors 10 racine de 3 fois racine de 3 ça fait ? IA

~~trois~~

~~trente sur 6 et 30 sur 6 ça fait 5~~

~~on peut simplifier.~~

o trois fois 2 voilà IC

~~On peut simplifier~~

o Je peux simplifier, je divise IC

~~six sur 1~~.

o Je divise par 3 IA

~~Euh non 5 sur 1~~

o au dénominateur et je divise par 3 au numérateur, il me reste 10 sur 2. IA

~~Ça fait 5 sur 1~~.

o ça fait 5. IC

~~cinq sur 1 c'est pareil~~.

♦ Et ici qu'est ce qu'on avait dans le membre de droite ? IA

~~euh ben 5 aussi~~.

o Oui j'avais le membre de droite qui est égal à 5 IC

• donc j'ai bien voilà G égal D IA

• donc 10 racine de 3 sur 3 est bien solution. IA

**• D'accord donc voilà en fait, soit on résoudra des équations à (inaudible) soit ça sera dans un contexte d'accord avec un petit énoncé. SB**

**• Deuxième exemple, deuxième exemple alors ça va être un petit peu plus particulier autre I**

Exemple numéro deux non classé

**• alors là c'est directement une équation, ça sera pas dans un contexte particulier SB**

• alors x racine de 3 moins 5 égal x racine de 12 plus x énoncé I

♦ Alors B, on t'écoute. AP

~~On met les x d'un côté et les nombres de l'autre.~~

**o Voilà quand on a vu la résolution des équations du premier degré, on met – entre guillemets – tous les x d'un côté et tous les nombres de l'autre AM**

♦ alors ça va nous donner quoi B. ? AC

~~x racine de 3 moins x~~

♦ Alors ? répétition AC

~~x le premier~~

~~on a x racine de 3~~

o Oui IC

~~Le premier celui-là qui est là~~

~~moins x~~

**o Alors on met tous les x d'un côté AM**

~~Ah oui x moins 3 non x racine de 3 euh~~

~~moins x racine de 12~~

~~moins x racine de 12~~

o Voilà IC

~~moins x~~

o Voilà moins x. IC

**o Tous les paquets en x, tous les paquets où on a des x** **répét. AM**

o donc c'est x racine de 3 moins x racine de 12 et moins x est égal à IC

~~5~~

o Plus 5 IC

♦ alors ensuite, est-ce que quelqu'un a une idée ? AP

~~On retire les racines~~

~~On peut pas~~

~~facteur~~

o Oui IC

♦ on va mettre quoi en facteur ? AC

~~Euh racine de 3 et racine de x~~

o Oui on va mettre x en facteur IC

♦ mais avant est-ce que je peux pas essayer comme j'ai des racines, est-ce que je peux pas essayer d'arranger un peu ?

AC

~~Si on peut les mettre~~

o Alors 12, c'est 3 fois 4 IA

♦ donc racine de 12 ça va être ? IA

~~2 racine de 3~~

♦ Alors ? répétition IA

o Tu multiplies par racine de 2 IC

o Racine de 12 on a dit c'est racine d'où l'utilité du brouillon c'est racine de 4 fois 3 répétition IA

♦ donc ça, ça fait ? répétition IA

~~2 racine de 3~~

o Oui. IC

~~racine de 4~~

o Oui racine de 4 racine de 3 IC

♦ et ça ça fait ? répét. IA

~~2 racine de 3~~

o Voilà 2 racine de 3 répét. IC

~~Oui mais~~

♦ Alors au lieu d'écrire x racine de 12, je vais pouvoir écrire IA

~~2x~~

o Voilà 2x racine de 3 IC

o donc à la ligne suivante, je vais obtenir x racine de 3 moins 2x racine de 3 moins x égal 5 IA

◆ et alors qu'est-ce que (IA ou) AC

~~On met en facteur le 3~~

~~ça fait moins 1~~

◆ Alors quand j'ai x racine de 3 moins 2 racine de 3 ? IA

~~Ca fait moins un x racine de 3~~

~~ça fait x moins 3x.~~

o Voilà IC

◆ ça fait ? IA

~~Moins un x.~~

o Voilà moins un x racine de 3 donc moins racine de 3. IC

En fait quand j'ai non classé

~~On met en facteur~~

o Voilà, IC

◆ voilà quand j'ai ça x quelque chose moins deux fois la même chose, quand j'ai y moins 2y, ça fait combien ? IA

~~Un y~~

o Moins un y, moins un y IC

maintenant, qu'est ce que non classé

~~Le 2 il est passé où ?~~

o Alors regarde quand j'ai un paquet je l'appelle y, d'accord ici j'ai le même paquet alors j'ai y moins 2y (?) AP

~~Moins y.~~

◆ Un gâteau moins 2 gâteaux ? IA

~~Moins un gâteau.~~

o Ca fait moins un gâteau. Donc moins un gâteau d'accord Lucie (?) ça marche avec les gâteaux. IC

◆ Alors maintenant, est-ce que entre les x est-ce que je peux arranger encore ? AC

~~(inaudible)~~

o Oui on peut pas arranger, on peut pas calculer, ici on a pu calculer mais là, on peut pas calculer IC

◆ donc on peut ? répét. AC

~~Factoriser, on met x~~

o Voilà IC

~~Facteur de racine de 3 moins 1~~

o Il manque quelque chose... moins racine de 3. IC

~~Ah ouais d'accord~~

~~Oh là là~~

o moins 1. Si je mets en facteur, oui, si je mets en facteur, le x en facteur, d'accord ? je mets en facteur, quand je mets x en facteur, il me reste IA

~~Pourquoi vous~~

o Dans le premier terme, il me reste moins racine de 3 dans le deuxième il me reste bien moins un IA

◆ égal ? IA

~~5~~

o cinq oui (?) IC

~~Pourquoi vous avez moins racine de 3 ?~~

~~On pourrait mettre moins x en facteur et à ce moment là~~

◆ Et si on mettait moins x en facteur, j'aurais quoi dedans ? IA

~~Racine de 3.~~

o Voilà j'aurais racine de 3 plus un, j'aurais l'opposé IC

~~Madame vous n'avez pas terminé (inaudible)~~

o Voilà c'est ça d'accord. IC

**• Parce qu'attention, on a vu comme pour les factorisations avec les produits remarquables hein, ici quand j'ai x en facteur, surtout ne pas dire qu'il ne reste rien, il reste toujours un quand on met en facteur**

**mise en garde I + AP**

~~Madame~~

Alors maintenant, quand non classé

~~Vous n'avez pas terminé là~~

o Non, c'est pas terminé, si je veux trouver x maintenant SE

~~Il faut~~

◆ Qu'est-ce que je dois faire ? AC

~~Il faut passer les parenthèses de l'autre côté~~

~~tu passes tout de l'autre côté~~

o Oui IC

◆ alors, tu passes comment, quelle opération tu fais ? AC

~~Moins~~

~~non plus, eh ho plus plus~~

~~tu divises~~

~~C'est multiplié, tu divises~~

Lucie ? non classé

~~Moins racine de 3 moins un la parenthèse divisée par 5~~

o Ah non c'est l'inverse, AC

• si tu avais fois 2 égal 5 d'accord tu fais 5 divisé par 2. Donc là tu fais 5 divisé par moins racine de 3 moins 1 d'accord, tu divise pas puisque (inaudible) AP

De là à là ? non classé

~~Non.~~

De là à là ? non classé

~~x moins 2x.~~

o Ici x moins 2x j'ai ici regarde AP

~~C'est en factorisant madame~~

o Voilà c'est en factorisant. IC

o Si tu mets x racine de 3 en facteur... x racine de 3 moins 2 x racine de 3 quand j'ai x racine de 3, c'est la même chose que x racine de 3 fois 1 d'accord, alors je vais mettre x racine de 3 en facteur, c'est égal à x racine de 3

AP

♦ qu'est-ce qui me reste dans le premier terme ? IA

~~Un.~~

o Un IC

♦ et dans le deuxième terme il me reste ? IA

~~2, moins 2.~~

o Moins 2 IC

• attention pas moins 2x hein mise en garde I

• puisque le x il est parti en facteur devant AP

♦ Et ça ça me fait combien ? un moins deux ça fait ? IA

~~Moins un.~~

o Voilà IC

• alors attention, comme c'est en facteur c'est fois hein, fois moins 1 mise en garde I

o alors ça fait combien fois moins un, IA

o on l'a déjà c'est moins x racine de 3 d'accord (?) IC

• Il faut prendre tout ça comme un gros paquet, un gros gâteau moins deux fois un gros gâteau donc il me reste bien moins mon gros gâteau. AP

• D'accord voilà donc, ça c'est la solution de mon équation alors souvent, on la laissera comme ça mais on a dit on ne peut pas faire SB

(inaudible)

o voilà on ne peut pas laisser de racine au dénominateur bon ben on verra ça demain, ça va pas tarder à sonner. IA

Fin de l'enregistrement

## Discours de l'enseignante E2

• Alors sans regarder dans le livre, ça sert à rien non classé

◆ **est ce que vous avez déjà fait de la trigonométrie ? SB**

o **Oui avec le cosinus par exemple. IC**

• **Donc de la trigonométrie on en a déjà fait dans le triangle rectangle d'accord. SB**

• **Et la trigonométrie cette année on la verra que dans le triangle rectangle surtout pas équilatéral.**

**mise en garde I + SB**

• **Alors on a vu le cosinus SB**

• **et l'année dernière lorsqu'on utilisait la calculatrice, vous aviez vu aussi qu'il y avait d'autres touches... autre I**

o **Sinus oui IC**

◆ **et il y en avait une troisième autre I**

~~tan.~~

◆ **c'est quoi tan ? notation I**

~~tangente.~~

o **la tangente IC**

• **donc finalement dans le triangle rectangle on va voir trois définitions, celle du cosinus que vous connaissez que vous allez me rappeler, celle du sinus et celle de la tangente. SB**

• Alors vous allez prendre le cahier de cours, c'est un nouveau chapitre. non classé

• On va commencer par un petit rappel sur le triangle, sur le vocabulaire qu'on utilise dans le triangle rectangle. SE

◆ Alors comment s'appelle le côté BC ? IA

~~l'hypoténuse~~

o l'hypoténuse IC

• parce que c'est le côté définition IT

~~le plus long~~

o le plus long c'est vrai IC

• **c'est la plus grande longueur et opposé définition IT**

~~à l'angle droit~~

o **à l'angle droit IC**

o donc BC c'est l'hypoténuse. répétition IC

• **Toujours le plus grand côté définition IT** o Alors si on regarde l'angle B cet angle-là, quel est le côté adjacent à l'angle B ? IA

~~AB~~

◆ **Adjacent ça veut dire quoi ?** **définition IT**

~~Qui touche l'angle~~.

o **Qui touche** **IC**

◆ Alors quel est le côté qui touche l'angle B ? IA

~~AB~~

o AB IC

• En fait au départ, y'a deux côtés qui touchent l'angle B. IA

◆ Et à votre avis AC on va l'appeler comment le côté AC ? IA

◆ Par rapport à l'angle B, par rapport à l'angle B, c'est quoi ? reprise IA

◆ J'ai entendu... reprise IA

~~côté opposé~~

~~le côté opposé~~

o le côté opposé. IC

◆ Et si on parle de l'angle C, ça va être quoi le côté adjacent à l'angle C ? IA

~~AC~~

o AC. IC

◆ Et le côté opposé à l'angle C ? IA

~~AB~~

o AB IC

• **Donc dans un triangle rectangle finalement, le côté** **définition IT**

• ici le côté opposé à l'angle B, c'est la même chose que le côté adjacent à l'angle C. Et le côté adjacent à l'angle B, c'est la même chose que IA

~~Le côté opposé à l'angle C~~.

o voilà. IC

◆ **Alors le côté adjacent, on s'en sert pour quoi ?** **AC**

◆ **Pourquoi est-ce qu'on s'en est servi l'année dernière ?** **reprise AC**

~~pour le cosinus.~~

o **pour le cosinus.** **IC**

• On va rappeler un tout petit peu, alors grand un définition, autre (organisation du cours)

◆ alors puisqu'on a parlé de l'angle B, ça se note comment ? notation I

~~cos B~~

o cos B IC

• cosinus de B est égal à définition IT

~~côté adjacent sur hypoténuse~~

o voilà, côté adjacent sur hypoténuse oui, IC

♦ le sinus de l'angle B se note... comment on le note ? notation I

o sin IC

• c'est la même notation que la calculatrice. notation I

• Sinus de B est égal à côté opposé sur hypoténuse. définition IT

♦ Et la tangente c'est un petit peu particulier la tangente, oui Ludovic ? définition IT

~~(inaudible)~~

o Oui IC

• c'est très bien il connaît la leçon avant qu'on la fasse. non classé

♦ La tangente de l'angle B se note, vous avez dit que ça se notait ? notation I

~~tan~~

• côté opposé sur côté adjacent. définition IT

• Alors ces trois définitions il faut les connaître par coeur. contrat I

**• Alors si vous connaissez le cosinus, c'est facile de connaître le sinus. Par contre pour la tangente ben faut pas se tromper, c'est bien côté opposé sur côté adjacent. mise en garde I**

• Alors vous ne refaites pas la figure, je la rappelle juste pour qu'on voit bien. SE

• On va essayer d'appliquer ces formules, ces définitions au triangle rectangle ABC. SB

♦ Alors si je vous demande avec la figure... le cosinus de l'angle B Avec les différents côté qu'on a là, qu'est ce que ça va être ? IA

~~AB sur AC~~

o Alors le côté adjacent à l'angle B c'était IA

~~AB~~

o AB donc AB sur l'hypoténuse BC d'accord. IC

♦ Le sinus de l'angle B ? IA

~~AC sur BC~~

o Le côté opposé c'est à dire AC sur BC... IC

**• toujours hypoténuse mise en garde I**

♦ et la tangente de B ? IA

~~AC sur AB~~

o AC sur AB IC

**• côté opposé sur côté adjacent. définition IT**

• Alors vous notez ça. SR

silence

**• si vous avez à trouver le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle, non seulement vous devez connaître vos définitions mais vous ne devez pas vous tromper en parlant du côté adjacent, du côté opposé, de hypoténuse. Faut bien repérer ça dans le triangle rectangle.** **mise en garde I + contrat, répétition I**

**• Alors le côté opposé, le côté adjacent, ils changent selon l'angle.** **mise en garde I**

**◆ Alors est-ce que vous vous rappelez, le cosinus était compris entre quel nombre et quel nombre ?**
**propriété IT + SB**

~~1 et 9/ 1 et 10.~~

**◆ Alors déjà, c'est un nombre de quel signe ?** **reprise propriété IT**

~~Positif.~~

**o Positif** **IC**

**• puisqu'on a dit que c'était le rapport de deux longueurs d'accord.** **AP**

**◆ Et sinon, il doit être plus petit que quoi ?** **reprise propriété IT**

**◆ Est-ce que vous vous souvenez de ça ?** **répétition, propriété IT**

~~d'AB (inaudible)~~

**◆ Plus petit que quel nombre ?** **reprise propriété IT**

~~Que 1~~

**o Plus petit que 1** **IC**

**◆ pourquoi ?** **AP**

**• si vous regardez le rapport là** **AP**

~~Parce que hypoténuse est le côté le plus grand.~~

**o Oui hypoténuse est le côté le plus grand** **IC**

**o et quand on fait le rapport, on s'aperçoit** **AP**

~~ben que hypoténuse c'est le dénominateur~~

**o eh oui.** **IC**

**• Si vous regardez bien, peu importe la valeur de AB et de BC, c'est pareil pour n'importe quel triangle rectangle** **AP**

o vous savez que BC c'est hypoténuse, c'est le côté le plus grand AB divisé par BC, AB il est plus petit que BC.
AP

**o D'accord et quand on divise un nombre par un nombre plus grand le résultat est toujours inférieur** **AP**

~~à un.~~

**o oui,** **IC**

◆ vous êtes convaincus ? non classé

• Alors on va noter cosinus de l'angle B. SR

**◆ On avait vu ça l'année dernière que c'était entre zéro et un ?** **propriété IT + SB**

~~si~~

o il me semble hein. non classé

◆ **Comment est-ce qu'on avait introduit le cosinus, on avait parlé de quoi ?** **AC**

◆ **Est-ce que je vous avais donné la définition comme ça : côté adjacent sur hypoténuse ?** **SB**

~~On avait fait l'application, on avait fait une activité avant~~

◆ **Oui c'était sur quoi ?** **SB**

◆ Oui d'accord une photocopie d'accord, non classé

◆ **qui parlait de quoi ?** **répétition SB**

~~y'avait des triangles rectangles~~

o **y'avait des triangles rectangles** **IC**

◆ **mais au départ on avait pas de triangles rectangles, je vous avais demandé de faire** **SB**

~~Ah oui avec les projections~~

o **les projections.** **IC**

◆ **C'est des projections comment ?** **IT + SB**

~~Orthogonales~~

o **orthogonales** **IC**

• **et on avait vu que le cosinus d'un angle, c'était le rapport de projections** **IT + SB**

~~orthogonales~~

o **orthogonales.** IC

• Alors on a parlé du cosinus, du sinus et de la tangente de l'angle B. SB

◆ Maintenant, si je vous demande pour l'angle C, le cosinus de l'angle C ? IA

~~AC sur BC~~

o AC sur BC. IC

◆ Le sinus de l'angle C ? IA

~~AB sur BC~~

o AB sur BC oui IC

◆ et la tangente de IA

~~AB sur AC~~

◆ de l'angle C, vous m'avez dit ? IA

~~AB sur AC~~

o AB sur AC. IC

◆ Alors qu'est ce que vous remarquez entre ce qu'on a écrit avec l'angle B et sur ce qu'on est en train d'écrire avec l'angle C ? AP

◆ Le cosinus de l'angle B, le sinus de l'angle B, la tangente de l'angle B et puis en dessous le cosinus de C, le sinus de C et la tangente de C, Qu'est ce qu'on remarque ? ça saute aux yeux... Caroline reprise AP

~~y'a partout un truc de pareil.~~

◆ un truc de pareil, tu peux nous expliquer un petit peu mieux ? répétition AP

~~ben par exemple, cosB y'a BC dedans, et sinus B aussi.~~

o oui c'est à dire que BC, IC

◆ c'est quoi BC ? IA

~~C'est hypoténuse.~~

o hypoténuse IC

**o c'est vrai que ça ne bouge pas dans n'importe quel angle** IC

• quand on aura besoin de hypoténuse, ici ça sera toujours BC, AP

**o c'est pour ça qu'on a la même chose hein parce qu'on a hypoténuse.** répétition AP

~~Le sinus aussi c'est pareil.~~

o oui IC

**o parce qu'on a le sinus, on a besoin de hypoténuse d'accord.** AP

~~oui et à côté aussi ah ben non c'est inversé~~

o alors là c'est inversé les numérateurs et dénominateurs sont inversés IC

~~oui~~

o D'accord, non classé

◆ j'aimerais bien que vous m'en disiez un petit peu plus sur les cosinus et les sinus là. reprise AP

~~(inaudible)~~

• alors BC c'est toujours le dénominateur, c'est normal puisqu'on a dit que c'était hypoténuse, elle ne change pas, qu'on parle de l'angle B ou de l'angle C. répétition AP

◆ Oui Julie ? non classé

~~Le cosinus de B c'est le sinus de C et le sinus de B, c'est le cosinus de C.~~

o eh oui si vous regardez ça IC

◆ c'est ce que vous vouliez dire ceux qui levaient la main ? non classé

o si vous regardez ça et que vous regardez ça ben c'est la même chose et ici aussi (d'accord ?) répétition IC

**• Donc dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre (hein ?)**

**propriété IT**

**• quand les angles sont, on prend les deux angles complémentaires, pas l'angle droit. propriété IT**

**• Donc le cosinus d'un angle, c'est le sinus de l'autre et le sinus d'un angle, c'est le cosinus de l'autre.**

**répétition, propriété IT**

• On va le noter en remarque. SR

• Remarque cosinus de B égal sinus de C, le sinus de B cosinus de C propriété IT

◆ et la tangente ? AP

~~c'est l'inverse.~~

o oui IC

◆ **comment est ce qu'on note l'inverse ?** **notation I**

~~un~~

o un IC

~~sur tangente de C~~

o voilà un sur tangente de C. IC

• **Vous ne devez pas oublier que le sinus d'un angle, le cosinus d'un angle, la tangente d'un angle, ce sont des nombres, ce sont des nombres qui n'ont pas d'unité.** **propriété IT + I**

◆ **Pourquoi ils n'ont pas d'unité ?** **AP**

o **parce que c'est un rapport de longueurs, on a des centimètres ou des mètres au dessus, pareil en bas donc le rapport n'a pas d'unité.** **AP**

◆ **Alors le cosinus l'année dernière, on s'en servait pour quoi ?** **AC + SB**

~~pour calculer un angle ou alors un côté.~~

o **alors c'était parfois en effet pour calculer la mesure d'un angle et puis parfois aussi pour calculer** **IC**

~~un côté.~~

o **un côté ouais.** **IC**

• **Et bien le sinus et la tangente ça va être la même chose, ça va être des outils supplémentaires pour calculer encore des angles et des longueurs de côtés.** **AC**

• Alors on va noter ça en application. SB

• Grand deux application. Première application

• **calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle** **énoncé IT**

• **Faites très attention dans les exercices que lorsque vous utilisez sinus, cosinus et tangente vous soyez bien dans un triangle rectangle.** **I mise en garde**

• Parce que dans les autres triangles, ça marche pas. C'est bien plus compliqué que ça. I mise en garde

• Alors on va travailler sur un exemple. SB

• On travaille dans un triangle rectangle ADE, rectangle en A, on connaît AD, on connaît DE et on voudrait connaître la mesure DEA. énoncé IT

• Donc l'angle DEA c'est celui-là. IC

• Habituez-vous à faire des triangles rectangles qui ne suivent pas les carreaux, les lignes hein.

I mise en garde

• Parce qu'en fait c'est souvent qu'on vous en donne inclinés des triangles rectangles. I mise en garde

• Alors la mesure de l'angle DEA, je vous précise quand même, au degré près. énoncé IT

• On verra que ça tombe peut être pas juste. IA

• **En général, un angle on le donne au degré près parce que c'est pas très intéressant de le donner au dixième de degré, parce qu'on sait pas trop ce que c'est hein.** **IC**

◆ Alors comment est-ce qu'on va faire ? AM

~~(inaudible)~~

◆Nelly non classé

~~(inaudible)~~

◆ comment est ce qu'on va faire, répétition AM

• y'en a deux qui savent, qu'ont une idée en tout cas, on est pas obligé d'avoir la meilleure idée mais on a une idée sûrement. Ch... autre I

~~Le sinus~~

o le sinus IC

~~de l'angle E~~

o l'angle tu dis, l'angle E. Alors c'est à dire l'angle DEA, de cet angle là, IC

• alors on va écrire, pour l'instant vous n'écrivez rien, on va voir. SB

◆ Le sinus de l'angle DEA alors Charles tu nous dis que c'est quoi ? AC

o le côté opposé c'est à dire AD IC

~~sur DE~~

o sur DE l'hypoténuse d'accord IC

◆ est ce qu'on le connaît AD oui, AC

~~quatre~~

o quatre sur DE IC

~~six~~

o six, IC

◆ quatre sur six, ça peut s'écrire autrement IA

~~deux sur trois~~

o oui deux sur trois. Le sinus de l'angle DEA c'est deux tiers. IC

◆ Est ce qu'on va pouvoir maintenant trouver l'angle DEA ? AC

~~oui~~

◆ qu'est ce qu'il nous faut ? AC

~~(inaudible)~~

o la calculatrice oui déjà. non classé

◆ Alors à la calculatrice, qu'est ce qu'on va devoir taper pour obtenir l'angle DEA ? AM

~~faut faire l'inverse, l'inverse~~

◆ oui Julie non classé

~~l'inverse de sinus puis après~~

◆ Alors est ce qu'on commence par écrire l'inverse de sinus puis ? AM

~~ça dépend des calculatrices~~

**o eh oui, ça dépend des calculatrices, certaines calculatrices, pour certaines calculatrices il faut d'abord écrire la fonction qu'on utilise** **AM**

c'est à dire pour certaines calculatrices on écrira sinus et puis après faudra faire deux divisé par trois et ça affiche le résultat mais la plupart normalement des calculatrices que vous avez (bruit) Charles (bruit) texas instrument là en général, vous avez des casio assez simples, c'est pas la peine d'avoir (bruit) vraiment perfectionnées. Sur ces calculatrices-là vous êtes obligés d'écrire d'abord deux divisé par trois à la calculatrice AM

alors deux divisé par trois, faites-le à la calculatrice IA

♦ Est ce qu'y en a qui ont des calculatrices où il faut faire le sinus avant ? Natacha non classé

~~elle est pas là~~

♦ tu l'as pas là, tu sais faire ? non classé

~~oui~~

♦ alors faites-le à la calculatrice, ceux qui l'ont. répétition IA

• Alors faites bien attention à ce que votre calculatrice soit bien en mode degré. I mise en garde

**• Vérifiez déjà parce que vous savez que pour les angles il y a trois façons de faire, ou bien on mesure en degrés ou en radians ou en grades** I mise en garde

• et nous on travaille avec les degrés. Donc vous devez avoir sur votre calculatrice D E G ou quelque chose comme ça, vous devez voir afficher I mise en garde

~~c'est comme ça ?~~

o ouais, IC

♦ alors qu'est ce que vous obtenez pour l'angle ? répétition IA

• là j'ai pas fini de donner les étapes de la calculatrice mais j'aimerais bien que vous le fassiez tout seul. non classé (contrat)

♦ Alors qu'est ce que vous obtenez ? répétition IA

♦ oui Caroline qu'est ce que tu as tapé sur la calculatrice ? répétition AM

~~deux divisé par trois~~

o oui IC

~~égal~~

o égal IC

~~et après j'ai fait sinus~~

♦ qu'est ce que tu as fait ? AC

~~sinus~~

o ah pas sinus non IC

~~sinus(inaudible)~~

o sinus moins un IC

**♦ c'est à dire qu'on fait...(?)** **définition IT**

o **le contraire d'accord c'est la fonction contraire.** **IC**

♦ **La fonction on appelle ça la fonction ?** **définition IT**

~~inverse~~

o **pas inverse parce qu'en fait inverse on le réserve plutôt à un sur quelque chose.** **habitude I**

o **On dit que c'est la fonction réciproque ou contraire.** **définition IT**

♦ Alors pour avoir sinus moins un, cette touche-là, pour faire ça, il faut peut être passer par seconde sinus, hein puisque c'est la fonction qui est juste au dessus de sinus c'est ça ? non classé

~~oui~~

o C'est le contraire parce que là on connaît l'angle, on connaît le cosinus pardon le sinus, c'est deux tiers. AP

o Sur votre calculatrice, vous avez affiché zéro virgule six six six six six etc. IA

♦ on connaît le sinus mais on veut l'angle (?) IA

~~faut qu'on passe au contraire~~

o **Quand on veut l'angle on fait sinus moins un,** **IC**

• **si on voulait le sinus on aurait tapé sinus.**

**AM**

• Mais on connaît là le sinus. AP

♦ Et alors vous obtenez finalement ? IA

♦ Qu'est ce qu'elle affiche la calculatrice ? répétition IA

~~(bruit, inaudible)~~

♦ J'ai demandé à Caroline. non classé

~~zéro virgule zéro un~~

♦ est ce que tu as bien pris Caroline ? non classé

~~(inaudible) pas respecté (inaudible) l'inverse (inaudible) ouais~~

o enfin l'inverse sinus moins un IC

~~(inaudible)~~

♦ tu as quoi comme calculatrice ? non classé

~~T I~~

o ben alors comme tout le monde non classé

~~ben oui~~

♦ fais voir oh là là y manque une touche ici comment veux-tu obtenir toutes ces fonctions là ? non classé

~~(inaudible)~~

o ah ben oui tu vas pas taper dessus non plus ben la pauvre calculatrice, elle doit souffrir là. Oui ben je crois qu'il va falloir changer de calculatrice sinon tu vas avoir des surprises. non classé

♦ Alors finalement Antoine, qu'est ce qu'elle indique la calculatrice, dis-moi ce qu'elle affiche ? IA

~~41,8103~~

o pas trop vite un zéro trois un quatre neuf bon ça c'est ce qu'elle indique IC

♦ mais nous, on voudrait connaître l'angle au degré près IA

~~42~~

o ouais puisque c'est une valeur approchée, on peut pas mettre égal hein, on met environ, environ 42 degrés. IC

♦ Alors une fois qu'on a cet angle là, est ce qu'on peut connaître d'autres choses dans le triangle... qui nous manquent, qu'est ce qu'on pourrait calculer dans ce triangle-là ? AP

~~ben le côté (inaudible)~~

♦ Cécile ? non classé

~~L'angle D~~

♦ l'angle ? non classé

~~D~~

o l'angle D là oui IC

♦ comment est ce qu'on pourrait le trouver cet angle ? AC

~~l'angle A moins l'angle B~~

♦ schutt... j'ai demandé à Céline, Ejouan non classé

~~dans un triangle la somme des angles est égale à 180, on peut faire~~

o 90 moins 42 degrés IC

~~ah ouais~~

o on fait 90 moins 42, on trouve D oui. IC

• Alors ça c'est la méthode la plus simple c'est bien, c'est la plus rapide aussi. autre I

**• Puisqu'on sait bien, on l'a appris en... y'a quelques années, que dans un triangle la somme des angles fait 180.**

**AP**

o On connaît l'angle A qui fait 90, on connaît l'angle E qui fait 42 donc le dernier fera AP

~~48~~

o ouais 48. Vous êtes sûrs 48 degrés ouais d'accord. IC

♦ Est ce que... non classé

• alors on va noter hein, on écrira après la justification. SB

♦ Est ce qu'on peut connaître autre chose encore dans ce triangle ? AP

~~AE~~

♦ AE, en faisant comment ? AC

~~(inaudible)~~

♦ alors j'ai entendu oui ? non classé

~~Pythagore~~

o Pythagore c'est vrai. IC

♦ Qu'est-ce qu'on pourrait utiliser encore, oui ? AC

~~côté adjacent sur côté opposé~~

o alors côté adjacent sur côté opposé IC

♦ mais pour ça, il faudrait parler de quel angle ? AC

~~E euh non A~~

♦ il faudrait parler de quoi sinus, de cosinus, de tangente de quoi ? AC

~~non euh~~

~~côté opposé sur côté adjacent~~

~~la tangente de l'angle D~~

o la tangente de l'angle D IC

♦ ça fait intervenir IA

~~côté opposé AE~~

o côté opposé c'est à dire AE IC

~~sur côté adjacent~~

o sur AD côté adjacent d'accord IC

♦ est ce qu'y a un autre moyen de connaître AE ? AC

♦ On a parlé de la tangente de l'angle D est ce qu'on ne peut pas utiliser d'autres outils de trigonométrie là ? AC

~~côté opposé sur côté (inaudible)~~

• on connaît les deux angles, AM

• ça doit pas être bien compliqué. appréciation I

♦ Le cosinus de quel angle ? IA

~~Le cosinus de l'angle~~

o E IC

~~E~~

♦ parce que le cosinus de l'angle E ça va être quoi ? IA

~~AE sur~~

o AE sur DE d'accord. IC

♦ On a parlé du cosinus, on a parlé de la tangente, est ce qu'on peut prendre le sinus d'un angle là ici pour trouver AE ? AC

~~euh oui~~

o le sinus de l'angle D oui IC

♦ on va obtenir IA

~~AE sur DE~~

o AE sur DE. IC

• Donc finalement, y'a un tas de façon ici pour trouver la distance AE. AC

- **Bon les distances, les mesures des côtés, on verra ça une prochaine fois.** **SB**
- Alors pour mercredi... non classé

Fin de l'enregistrement

## Discours de l'enseignante E3

• bon on va commencer par corriger les exercices et..., non classé

♦ où sont les cahiers ? non classé

~~dans le sac~~

• on était page 60. Donc j'avais donné 12, 14, 16, 18 page 60. Le 12 on l'avait déjà corrigé donc on corrige le 14, le 16 et le 18. non classé

♦ Alors le 14, où on en était l'autre fois[8] bon alors Nicolas, Benoît et Charlotte. non classé

• On peut pas se mettre à quatre. non classé

~~j'ai oublié l'exercice.~~

o ben c'est pas grave, tu es capable de le refaire quand même hein (?) I appréciation

• Allez Benoît le b et Charlotte le c. non classé

~~moi je fais le a~~

o oui. Le 14 et le 12 on l'a déjà corrigé non classé

~~ah ben ouais~~

o c'est le 12 ou le 14 non classé

~~le 14~~

• Non attends, vraiment t'exagères(bruit) tu vas redescendre[9] (bruit), tu vas prendre de la craie blanche. Chut... non classé

[les élèves font les exercices au tableau]

~~y'avait pas de moins devant la parenthèse~~

~~y a pas de moins devant la parenthèse~~

~~mais c'est pas un moins~~

o c'est x moins trois demi facteur de trois demi de x moins (bruit) facteur de un moins deux racine de deux sur trois égal zéro. IT énoncé

[les élèves continuent les exercices]

~~non on voit pas bien, non non n'efface pas~~ (bruit)

• Chut alors donc on a un moins deux racine de deux sur trois x. IT énoncé

• Attention à la parenthèse Charlotte. I mise en garde

• Bon Raphaël tu vas faire le petit c. non classé

---

[8] l'enseignante fait corriger les exercices par les élèves en les envoyant trois par trois au tableau et en suivant un ordre à peu près régulier dans la classe (la disposition des élèves est presque toujours la même en classe). Ainsi la séance où l'exercice numéro 12 a été corrigé correspondait à un certain trio, c'est par rapport à ce groupe que l'enseignante dit « où on en était la dernière fois? »

[9] l'enseignante s'adresse à un élève qui vient d'entrer en classe avec du retard, il y a une discussion et finalement l'enseignante lui demande d'aller chercher de la craie.

• Tu as oublié le x | I mise en garde

[rires]

~~tu peux te décaler un peu à droite~~

• Tu effaces le petit a Raphaël parce que sinon tu vas pas (bruit) | non classé

• donc ça nous donne | IA

♦ pourquoi tu multiplies par deux racine de deux ? | AP

~~par racine de deux~~

o oui racine de deux ça suffit, | IC + AM

• comme ça tu auras enfin bon pourquoi pas mais je veux dire après tu seras obligée de simplifier alors que si tu multiplies directement par racine de deux le numérateur et le dénominateur ça nous donne trois racine de deux sur | AP + AM

~~sur deux~~

♦ et les solutions de l'équation ? | IA

~~ah oui excusez-moi~~

• en dessous | I habitude

~~je peux effacer~~

o attends deux minutes t'as la place encore Delphine | non classé

~~faut que~~ (bruit)~~ moins ici~~

♦ où c'est qu'il a oublié le moins ? | I autre

~~là j'ai oublié le moins~~

~~parce que~~

o attends attends on va écouter d'abord ce que dit Guillaume | I autre

~~est ce qu'il y a un moins devant deux racine de deux sur trois ?~~

o oui y'a un moins | IC

o puisque tu as un moins racine de sur trois | AP

~~donc quand on le passe y'a plus le moins~~

o attends tu l'passes pas là tu divises, | I habitude ou autre

• tu l'passes entre guillemets hein, tu divises là... Entre guillemets, tu divises là... | I habitude ou autre

• c'est une | non classé

~~tu peux pas si tu l'passes~~

~~puisque là~~

o oui oui non mais non non c'est bon ce que t'as fait | IC

**• attention Guillaume, ça c'est une équation de la forme a x égal b avec a différent de zéro hein** | **I mise en garde + IT propriété**

**• donc la solution c'est b sur a d'accord** | **IT propriété**

o bon tu passes le moins il reste là d'accord (?) IA ou AP[10]

~~alors je le laisse ?~~

o oui oui c'est bon IC

~~mais alors y'a le moins~~

~~y'a moins moins~~

o non c'est pas moins x IC

• parce que justement il a divisé directement par moins deux racine de deux sur trois donc c'est pas moins x. En effet si t'avais mis moins x là, tu pouvais diviser simplement par deux racine de deux sur trois ce qui revenait au même après puisque tu trouvais moins.... et deux racine de deux sur trois AP

• alors la solution donc alors x égal quatre fois quatre demi moins un tiers d'accord... IA

• alors le seize Guillaume, Alexandre non classé

~~Pourquoi t'as écrit moins ?~~

♦ qu'est ce qu'y a Cécile ? I autre

~~C'est pas (bruit) mais c'est pas un moins~~

o oui c'est pas IC

♦ qui n'a pas fini de prendre la correction ? qui n'a pas fini de prendre la correction ? non classé

o tout le monde a fini on peut effacer alors... non classé

• bon tu mets le numéro tu marques ce que tu fais comme... alors mets le numéro dessus non classé

[silence]

• tu fais le petit b quoi non classé

[bruit]

o chut

[bruit]

♦ bon qu'est ce qu'on remarque ? AP

~~trois fois trois~~

♦ c'est ? AC

o trois fois trois donc c'est trois au carré IC

♦ comment on peut réécrire tout ce terme là ? AC

o C'est trois facteur de, trois facteur de x moins un au carré IC

~~puis je mets quatre x enfin quatre au carré~~

o si tu veux. IC

---

[10] le classement IA est dû à « bon tu passes » puisque là, l'enseignante applique le résultat qu'elle a rappelé sur les équations de la forme ax = b, l'expression « tu passes » correspondant à d'écrire et appliquer le fait que pour ce "genre d'équation", le résultat est donné par x = b/a. Il s'agit alors d'appliquer le "déplacement" de a.
le classement AP est dû au reste de la phrase « le moins il reste là d'accord » qui par suite de l'application précédente "explique" ce qu'il advient du signe "moins".

♦ Qu'est ce que tu vas faire maintenant ? AC

~~passer le quatre de l'autre côté~~

• bon alors Alexandre, ... ta factorisation.... tu t'es trompé déjà... dans un signe I mise en garde

~~c'est moins alors~~

o non, IC

o là c'est plus IA

• puisqu'on a transposé AP

• mais c'est dans ta factorisation que ça marche pas I mise en garde, reprise

~~là c'est plus deux oui moins deux ouais moins deux x~~

o oui c'est moins deux x IC

• parce que moins deux que multiplie moins deux x ça donne bien <u>plus</u> quatre x hein d'accord AP

♦ bon est ce que cette factorisation là est la meilleure? I appréciation

~~je ne sais pas j'ai pas factorisé~~

~~ben on factorise comment ?~~

~~ben on factorise pas~~

o en fait tu vas factoriser IC

♦ qu'est ce que tu vois là ? Alexandre AC

~~ben ça~~

o oui IC

♦ alors qu'est ce que t'aurais pu faire comme factorisation à cette ligne là... pour voir tout de suite le moins un AC

~~ben en fait on multiplie par moins un~~

o oui IC

♦ alors t'as déjà multiplié par moins deux avant alors tu vas multiplier par moins...? IA

♦ qu'est ce que tu aurais pu faire comme factorisation ? AC répétition

~~multiplier par deux~~

o par plus deux IC

o alors bon alors tu changes donc ça fait plus deux IA

o mais c'est faux ce que tu as mis à l'intérieur de la parenthèse à ce moment là, ça nous donne voilà IC + I mise en garde

[bruit]

o bon alors c'est bon ce que tu fais bon alors IC

~~c'est quatre x moins trois c'est pas quatre x moins deux ah non non non pardon~~

~~pourquoi t'as marqué là y'en a plusieurs des solutions là~~

~~eh Alexandre y'a deux solutions~~

• c'est moins un neuvième, neuf x plus un égal zéro ça fait neuf x, égal moins un x égal moins un neuvième. IA

[bruit]

~~ben je sais pas on doit pas faire comme ça~~

♦ où y sont tes exercices là non classé

~~je les ai oubliés~~

o faudrait peut être noter les résultats non classé

• bon le dix-huit maintenant. non classé

• bon le petit a y'a pas besoin de vérifier. I appréciation

♦ Stéphanie regarde ton livre dis moi les résultats les solutions des équations du dix-huit IA

• alors x carré égal quatre, x carré moins quatre égal zéro. X carré égal quatre, x égal racine de quatre (l'enseignante lit ce que l'élève a écrit au tableau) non classé

♦ et ça donne x égal racine de quatre ? IA

~~x égal deux~~

♦ ou ? IA

~~x égal moins deux~~

o ou moins deux IC

o n'oublie pas hein alors avec ce qu'on a vu hier hein, x carré moins quatre ; x carré moins deux carré. Egalité remarquable : x moins deux facteur de x plus deux d'accord. AP

♦ Alors le deuxième x carré égal quarante-neuf les solutions c'est IA

~~sept et moins sept~~

♦ et x carré égal cinq les solutions sont IA

~~c'est racine de cinq et moins racine de cinq~~

• bon ben Daniel, Didier et puis Lucien non Stéphanie vous allez faire le petit b non classé

[bruit]

• bon ben vous le faites dans l'ordre. Daniel tu fais la première, Didier la deuxième, Stéphanie la troisième. non classé

[bruit]

• Attention ton trois I mise en garde

**• ça n'a pas beaucoup d'importance on a quand même la différence de deux carrés même s'ils sont dans le mauvais sens. I mise en garde + I habitude**

• Ton trois il n'est pas au carré fais attention. Et n'oublie pas le moins devant. I mise en garde

• Bon Daniel pareil t'as fait la même erreur que Didier, le deux il n'est pas au carré. Le carré ne porte que sur le x. I mise en garde

~~J'ai fais une erreur~~ (l'élève au tableau) o Oui mais il ne faut pas oublier le sept aussi à ce moment là. I mise en garde

• Donc t'avais la racine de sept, après t'avais racine de sept et t'avais racine de quatorze. Non c'était bien ce qu'il a fait au contraire. Donc là t'étais obligé de simplifier à ce niveau là. Tu trouves exactement le même résultat mais c'est mieux ça. AP

~~j'ai trouvé quatre septième~~

o racine de quatorze septième t'as trouvé IC

[bruit]

• bon alors déjà là on va s'occuper de celui-là, on s'occupera de celui-là après. non classé

♦ Donc t'as déjà racine de dix-huit sur moins racine de trois. Alors déjà le signe bon et puis on pourra peut-être simplifier. Racine de dix-huit c'est égal à quoi ? IA

~~euh c'est neuf fois deux~~

o si tu veux IC

♦ mais y'a peut être une autre décomposition ? IA

~~six fois trois~~

o donc on enlève ça comme ça, ça fait donc racine sur racine de trois IA

♦ et ça c'est égal à quoi ? IA

~~à racine de six~~

o à racine de six IC

[bruit]

• tu as oublié quelque chose on n'oublie pas la deuxième racine I mise en garde

**• il a oublié, il a fait les équations comme on les fait, il a fait les équations comme on les a fait quand on a traité les racines. Il a oublié à chaque fois la deuxième solution. I mise en garde**

**• Alors que quand on a fait avec les identités remarquables, les équations produit, on est sûr de ne pas oublier la deuxième racine. Enfin la deuxième solution d'accord (?) AM**

• bon alors y'avait une, y'avait dans celui que faisait Stéphanie on pouvait faire comme on a fait là. C'est à dire mettre trois en facteur ou moins trois en facteur, on trouvait x carré ; moins trois facteur de x carré moins six égal zéro. AM

~~ça fait moins racine de deux.~~

• donc c'était équivalent à x carré moins six égal zéro donc ça fait x plus racine de six facteur de x moins racine de six égal zéro et on trouvait tout de suite les solutions x égal racine de six et x égal IA

• dis donc t'exagères là Stéphanie on met pas ça comme ça hein x égal moins racine de six hein on pouvait écrire ça moins trois facteur de x carré moins six égal zéro I appréciation

• c'était plus simple. I appréciation

♦ Alors [bruit] Elodie, Clément, Véronique (l'enseignante demande aux trois élèves qu'elle vient de désigner d'aller au tableau pour corriger la suite des exercices) non classé

♦ bon alors qui n'a pas fini de corriger ? non classé

• Alors vous attendez deux minutes non classé

[bruit]

• bon ça y est. non classé

~~non~~

• bon allez efface. Efface complètement à droite. non classé

o Tu recommenceras tout seul. non classé

• Alexis, travaille. non classé

♦ Bon alors x carré égal moins cinq. IT énoncé

~~pas de solution~~

o voilà pas de solution. IC

**• Quelque soit le nombre x, x carré est un nombre positif donc il ne peut pas, on ne peut pas trouver de nombre tel que son carré soit négatif donc il n'y a pas de solution. AP**

• Et alors Clément, x carré égal moins cinq ; x carré égal moins racine de cinq. (l'enseignante lit ce que l'élève a écrit au tableau) non classé

• Bravo il faut réfléchir un petit peu hein I appréciation

~~et si au lieu de le mettre à droite on le mettait à gauche ?~~

o même ça ne change rien. IC

o T'auras moins x carré moins cinq égal zéro, c'est pas possible. AP[11]

~~Par les identités remarquables.~~

o Par les identités remarquables, on en a pas non plus parce qu'on aura x carré plus cinq égal zéro. AP[12]

~~non si on passe le x de l'autre côté, ça donne moins cinq moins x carré égal zéro et après on met moins cinq au carré~~

~~non c'est pas possible~~

♦ alors tu veux faire moins x carré moins cinq égal zéro alors quelle identité remarquable ? AC

~~moins x moins racine de cinq facteur de moins x...~~

**♦ alors a carré moins b carré qu'est ce que tu considères comme le a et comme le b ? AM**

~~ben moins x~~

~~moins x~~

~~oui mais là x~~

**o et alors après tu vas faire racine de moins x IA**

[11] l'enseignante explique « ça ne change rien » en donnant une écriture équivalente. Nous estimons que l'enseignante donne cette équivalence dans le but de faire réaliser aux élèves l'impossibilité de la résolution de l'équation. C'est en cela que nous attribuons à ce passage une valeur d'explication.

[12] l'enseignante met en rapport l'exercice avec un résultat connu des élèves en profitant de l'intervention d'un élève. Nous pensons que l'enseignante considère que cette mise en rapport est suffisante pour expliquer « c'est impossible ». C'est pourquoi nous classons aussi ce passage en explication.

**o bon c'est pas, d'ailleurs on peut pas,** **IC**

**o j'veux dire bon x pourquoi pas c'est un nombre négatif** **AP**

**o mais de toute façon, mais même, réfléchis,** **I appréciation**

**o je veux dire t'as moins x carré c'est un nombre négatif alors x carré est un nombre positif ou nul vous êtes d'accord moins x carré donc ça sera un nombre négatif d'accord.** **AP**

**o si tu fais moins un nombre négatif moins cinq , il peut pas être égal à zéro, c'est pas possible hein d'accord.** **IA**

**o Ca se voit encore mieux là, x carré quelque soit le nombre x hein x carré est un nombre positif. Donc il ne peut pas être égal à un nombre négatif c'est pas possible x carré c'est un nombre positif ou nul t'es d'accord, quelque soit le nombre x.** **AP**

**o C'est la règle des signes, c'est ce qu'on a vu l'année dernière. Le produit de deux nombres d'un même signe est un nombre négatif.** **AP + IT propriété**

~~ouais d'accord~~

(bruit)

• bien sûr le deuxième c'est aussi impossible. IA

• J'ai vu faire mais le deuxième c'est aussi impossible. IA

~~ben le troisième aussi (bruit)~~

~~bon ben les trois sont impossibles~~

♦ alors pourquoi c'est impossible ? AP

o deux x carré égal moins cinq IT énoncé

**o deux x carré est un nombre positif quelque soit le nombre x** **AP**

~~c'est pour ça que j'ai fait ça~~

**o donc multiplier par un nombre positif il peut pas avoir un nombre négatif d'accord (?)** **AP**

o Donc c'est partout impossible et pareil pour le dernier. IA

• Ouais ça c'est parce que vous réfléchissez pas c'est tout bête hein on a le même problème. I appréciation

~~ah ouais~~

• si on a quatre x carré, là c'est équivalent à quatre x carré égal moins seize chut... hein c'est complètement équivalent à quatre x carré égal moins seize. AP

**• Même problème x est un nombre, x carré est un nombre positif ou nul, multiplié par un nombre positif, ça peut pas être égal à un nombre négatif** **AP**

**• d'accord hein alors pour le moment on sait pas les résoudre on saura les résoudre plus tard mais pour le moment on sait pas.** **SB**

~~mais~~

[bruit]

o je passe le, je passe entre guillemet le quatre de l'autre côté ça te donne moins seize égal quatre x carré c'est d'accord (?) AP

~~ouais~~

o que je peux lire quatre x carré égal moins seize ou alors je fais moins quatre x carré égal plus seize ou quatre x carré égal moins seize d'accord. AP

♦ Bon voilà qu'est ce qui a Nadine ? I autre

~~on passe le seize de l'autre côté euh moins quatre x carré égal plus seize vous pouvez pas mettre moins quatre x carré égal non moins quatre x carré moins quatre carré égal~~

**o bon alors soit on les résout avec les identités remarquables comme on a fait hier les équations produits. Là on est capable de le faire puisqu'on a en fait AM**

o on a quatre x carré plus seize égal zéro. IT énoncé

**o On n'a rien, on n'a aucun moyen à notre disposition pour le mettre sous la forme de produit de facteurs de premier degré d'accord AM**

**o bon alors on peut les résoudre avec les racines comme on a fait l'autre fois hein AM**

**o donc il faudrait ça voudrait dire qu'on devrait écrire racine de ça égal racine de ça. IA**

**o Mais ça t'as pas le droit d'écrire parce que moins quatre x carré c'est un nombre négatif d'accord. AP**

~~ben oui mais ça fait moins racine de quatre x carré~~

**o x carré est un nombre positif donc moins quatre x carré est un nombre négatif AP**

~~mais oui mais~~

o donc on a surtout pas le droit de mettre ça IC

~~et après le moins~~

~~si x égal deux ça fait bien~~

~~ah non ça marche pas~~

o ben ça fait moins seize IA

~~x carré ça fait quatre~~

o ben ça fait moins seize égal seize je te signale IA

~~après on rabaisse~~

o ah non moins seize moins seize égal zéro (bruit) IA

- **bon allez on passe aux inéquations non classé**
- alors vous prenez votre cours. non classé
- Bon on refera des exercices, je vais vous en donner pour la prochaine fois. I autre
- **Alors les inéquations cette année on va puisque nous on avait déjà fait l'année dernière, y'a rien de nouveau hein par rapport à ce qu'on a vu l'année dernière SB**
- **on va juste en résoudre en plus des systèmes d'inéquations à une inconnue hein. SB**
- **On est toujours à une inconnue SB répétition**

~~ah parce que y'en a qui sont aussi~~

**o on verra à deux inconnues plus tard.** **SB**

• Grand trois : alors grand un, équation du premier degré ; deux équation produit. Trois alors on va faire des rappels. Alors premier rappel. SE

• Bon B si t'as pas d'encre écris avec un stylo bille. non classé

**• Alors premièrement petit a on va rappeler les règles d'ordre et d'addition (bruit)** **SE**

**• Bon alors vous vous souvenez ce qu'on avait vu l'année dernière avec inéquation** **SB**

(bruit)

**• Alors quand on a résolu les inéquations l'année dernière on avait avant** **SB répétition**

(bruit)

**o on a donner des règles des inégalités oui. On avait donner des règles pour savoir justement après résoudre les inéquations.** **SB**

**◆ Est ce que vous vous souvenez ? c'est les mêmes équations...** **non classé**

~~à quelque chose près~~

**◆ à quelque chose près ?** **non classé**

~~les signes~~

~~ah oui y avait des signes au lieu d'avoir~~

**o alors si on avait** **SE**

~~au lieu d'avoir égal, on avait plus grand~~

**o voilà les inégalités** **IC**

**o déjà si on avait** **SE reprise**

~~non mais y'a des signes~~

~~un truc avec égal ça serait~~

**o non ça serait des égalités** **IC + IA**

**◆ si on avait a par exemple hein strictement inférieur à b on peut avoir inférieur ou égal, supérieur ou égal qu'est ce qu'on avait de** **SB + IT propriété**

~~ça faisait moins a supérieur à moins b~~

**◆ Alors d'abord l'addition, donc si on additionne le même nombre à chaque membre de l'inégalité** **IA**

~~a plus c inférieur à b plus c~~

**◆ a plus c, et alors il est comment par rapport à b plus c ?** **IA**

~~inférieur, plus petit~~

**o alors quelque soit les nombre a, b et c et on avait donné comme règle quelque soit les nombres a, b, c ; a plus c et b plus c sont rangés dans le même ordre que a et b.** **IT propriété**

**• Par exemple si a est supérieur à b alors a plus c est supérieur à b plus c. Bon y'a les trois hein ; supérieur ou égal, strictement inférieur, inférieur ou égal** **IA**

(bruit)

• hein ? non classé

**• Après quand on résout les inéquations, on fait** **non classé**

[bruit]

**o avec les crochets oui** **IC**

**o on va voir ça après.** **SB**

(bruit)

• Alors petit b non classé

**♦ quand est ce que** (bruit) **ça change ?** **I autre**

**o alors justement quand est ce que ça change de côté, on va voir** **SE**

~~de quoi, les crochets ou les signes ?~~

**o les sens de l'inégalité** **IA**

**• alors changer de côté c'est plutôt changer le sens de l'inégalité** **I habitude**

~~c'est quoi les crochets~~ ?

~~ben tu sais (bruit) comme ça ou bien comme ça~~

**• Alors petit b, ordre et multiplication** **SE**

~~c'est quand on multiplie~~

**• alors là, au lieu d'ajouter aux deux membres de l'inégalité, on va multiplier.** **IT énoncé**

**♦ Alors vous vous souvenez comment il faut, quand on multiplie par un nombre c alors différent de zéro hein** **SB + IA**

~~ben si~~

**♦ alors il change tout le temps de sens ?** **IA reprise**

~~il change quand y'a un nombre négatif~~

**o voilà il change si c est un nombre strictement négatif** **IC**

**• on va le montrer après** **SB**

**♦ et si c est un nombre strictement positif alors** **IA**

~~ça change pas~~

**o le sens de l'inégalité ne change pas.** **IC**

**• Alors on va marquer ça.** **SR**

**• Quelque soient les nombres a et b, si c est un nombre strictement positif alors le produit ac et le produit bc sont rangés dans le même ordre que les nombres a et b. Si c est nombre strictement négatif alors ac et bc sont rangés dans l'ordre inverse de a et b.** **IT propriété**

**♦ Alors par exemple si on a, juste un exemple hein, si on a deux nombres a et b tels que a soit inférieur ou égal au nombre b alors on va les multiplier par un nombre c strictement positif alors qu'est ce qu'on va pouvoir dire?** **IT énoncé + IA**

~~ac plus grand ou égal à~~

**◆ plus grand ?** **IA**

~~plus petit~~

**o plus petit ou égal, inférieur ou égal à** **IC**

~~bc~~

**◆ et si on les multiplie par un nombre d strictement négatif** **IA**

~~et bien ad inférieur euh supérieur ou égal à~~

**o supérieur ou égal à bd.** **IC**

**• Alors on va le démontrer dans le cas, là par exemple, a inférieur ou égal à b.** **SE**

**◆ Démonstration alors a inférieur ou égal à b qu'est ce que ça veut dire du signe euh enfin du signe de a moins b ?** **IA**

~~il est positif non non qu'est ce que je raconte~~

**◆ si a est plus petit que b qu'est ce qu'on peut dire de a moins b ?** **IA répétition**

~~négatif~~

**o négatif** **IC**

**• donc on peut dire que a moins b est inférieur ou égal à zéro d'accord ( ? )** **IC**

**◆ Si c est positif qu'est ce qu'on va pouvoir dire du prod... du signe du produit de a moins b par c ?** **IA**

~~négatif~~

**o il sera négatif hein** **IC**

**• règle des signes.** **AP**

**• Règles des signes hein un nombre positif par un nombre négatif donne un nombre négatif.** **IT propriété**

**• Alors on développe, distributivité** **AC + IT propriété**

~~ac moins bc~~

**◆ alors si le produit, la différence de deux produits est négative qu'est ce qu'on peut dire ?** **IA**

~~ac et~~

**◆ comment ( ? ) euh si on compare les produits ac et bc** **IA reprise**

~~ac est inférieur ou égal~~

**o à bc d'accord (?)** **IC + IA**

**• alors on a développé là, distributivité pas de problème** **AC+ IT propriété + I appréciation**

**• donc on a la différence des deux produits ac et bc qui est négative donc ac est plus petit que bc.** **IA**

**◆ Bon alors si d est négatif (Jérôme qu'est ce qu'y a ?) alors si d est négatif alors qu'est ce qu'on va pouvoir dire du produit a moins b ?** **IA**

~~il est supérieur ou égal~~

**o donc on a un nombre négatif.** non classé

C'est la fin du cours, une sonnerie retenti, les élèves sortent.

## Annexe 3 : Une petite analyse de trois manuels scolaires de la classe de Troisième

Les pages qui suivent sont réservées à des exemples extraits des manuels utilisés par les élèves des classes des enseignantes que nous avons observées. Le livre 1 est utilisé par les élèves de la classe de l'enseignante E1, le livre 2 par ceux de l'enseignante E2 et le livre 3 par les élèves de la classe de l'enseignante E3.

Livre 1 : Transmath classe de Troisième édition 1993, collection NATHAN.
Livre 2 : Maths 3° Irem Strasbourg, Edition HACHETTE LIVRE 1993.
Livre 3 : Math 3°, Edition BELIN 1993.

Les contenus des trois manuels correspondent au programme en vigueur (B. O. du 12 décembre 1985) lorsque nous avons procédé aux observations.

Livre 1 « TRANSMATH » de la classe de troisième édition 1993, collection NATHAN.

Nous nous intéressons aux chapitres 10, 12 et 3 titrés « Racines carrées », « Inéquations » et « Translations, vecteurs, coordonnées ».

Le chapitre 10 « Racines carrées » est réservé à la définition de la racine carrée[13] d'un nombre positif et à l'introduction de quelques propriétés.

Une situation que les élèves connaissent, le théorème de Pythagore, sert de rappel à l'utilisation de la racine carrée : dès le début du chapitre la racine carrée apparaît comme une touche de la calculatrice qui a été « utilisée » pour tirer des conclusions de certaines écritures obtenues en classe de Quatrième.

*Extrait*

**Utilisation de la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice**

En classe de Quatrième, après utilisation du théorème de Pythagore, on a souvent été confronté à la situation suivante : connaissant $AB^2$ (le carré de la longueur de AB), calculer la longueur de AB.

**Exemple 1**

Du renseignement $AB^2 = 4$, on déduit immédiatement que $AB = 2$.

**Exemple 2**

Du renseignement $AB^2 = 19$ pour en déduire une valeur approchée de AB on utilise la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice :

$19\ \sqrt{\ }$ ou $\sqrt{\ }\ 19\ =$ selon le type de calculatrice.

Écran 4.358898944

On écrit alors : $AB \approx 4{,}35$ (par troncature au centième) ou $AB \approx 4{,}4$ (par arrondi au dixième) ou…

En rédigeant ainsi, les auteurs du manuel admettent que l'écriture « AB » possède un sens pour les élèves et qu'ils l'associent à une valeur numérique (même s'ils n'en maîtrisent pas tous les

[13] Nous ne distinguerons pas les aspects outil ou objet de la racine carrée, nous ne préciserons pas non plus si nous parlons de la « fonction racine carrée ». Nous n'utiliserons que l'expression « racine carrée (de…) ».

aspects). Les auteurs admettent donc que pour les élèves, dans un cadre géométrique, A et B désignant deux points du plan, écrire AB signifie que cette longueur existe, par conséquent, qu'il existe une valeur numérique exprimant cette longueur. Ainsi dès le début du chapitre, un problème non posé est résolu : l'existence de la racine carrée d'un nombre positif ou plutôt, l'existence d'un nombre (positif) dont le carré apparaît sous une forme connue.

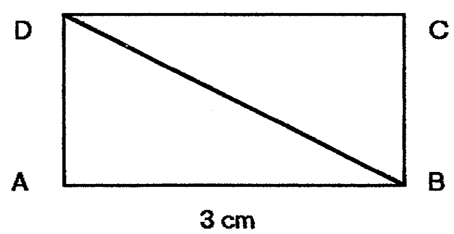
Ensuite, de façon analogue à ce qui précède, l'existence d'un nombre noté x qui sera appelé « racine carrée de 13 » est implicitement attestée parce qu'il représente une longueur : la longueur d'une diagonale d'un rectangle. Par ailleurs, les élèves sont appelés à trouver une raison qui fait de ce nombre « racine de 13 » un nombre positif : le seul argument dont ils disposent est que x = AC où AC est la longueur d'un segment.

*Extrait*

**1. Valeur exacte, valeurs approchées**

Avec le théorème de Pythagore

ABCD est le rectangle ci-contre. On souhaite connaître la valeur exacte (en cm) de la longueur AC. Notons x cette valeur exacte.




**a.** Le nombre x ne peut pas être négatif. **Pourquoi ?**

**b. Démontrer** que $x^2 = 13$.

**x est donc le nombre positif qui "élevé au carré donne 13".**

**c.** Avec la calculatrice, **donner** trois valeurs approchées de x arrondies au dixième, au centième, au millième.

Nous remarquons donc les trois points suivants :

1- x (racine carrée de 13) est introduit comme un nombre (au même titre que ceux déjà connus des élèves) puisque longueur d'un segment,

2- ce nombre existe pour la même raison (il est la longueur d'un segment),

3- ce nombre est positif pour la même raison.

L'extrait ci-dessus est suivi d'un développement dont l'objectif est de montrer qu'on ne peut obtenir « la valeur exacte » du nombre x positif dont le carré est 13.

*Extrait*

**2. Le nombre positif x tel que $x^2 = 13$**

Une calculatrice affiche pour valeur de x le nombre : $\boxed{3.6055512}$

**On veut savoir si ce nombre est la valeur exacte de x**, c'est-à-dire est-ce que $(3.6055512)^2$ est égal à 13 ?

Sans utiliser la calculatrice, **trouver** le dernier chiffre du nombre $(3.6055512)^2$. **En déduire** que ce nombre est différent de 13.

Donc le nombre affiché 3.6055512 est seulement une valeur approchée de x, mais ce n'est pas la valeur exacte.

On sait démontrer, mais nous l'admettrons, qu'il n'existe pas de nombre décimal et qu'il n'existe pas de quotient $\frac{a}{b}$ d'entiers dont le carré est 13.

A la fin de ce développement le nombre x est nommé « racine carrée de 13 » et est « écrit $\sqrt{13}$ ».
Racine carrée de 13 est donc présenté comme un nombre positif mais est exclu de ceux connus par les élèves, son existence est implicitement admise et son signe est indiqué positif dans une situation particulière.
Une définition généralise « la racine carrée d'un nombre positif » :

« La racine carrée d'un nombre **positif** $a$ est le nombre **positif** qui, élevé au carré, donne $a$. On note $\sqrt{a}$ la racine carrée de $a$… »

La partie du chapitre qui précède la définition expose un cas particulier lié au cadre géométrique (titre 1 ci-dessus). La généralisation de la racine carrée est annoncée par le titre qui introduit la définition : « la racine carrée en général ».
L'existence du nombre « racine carrée de a » est introduite par sa désignation et par l'existence de son carré (c'est « le nombre **positif** qui, élevé au carré, donne a »). Le signe positif de ce nombre est donné par la définition.
Nous retrouvons ici les trois points que nous remarquions ci-dessus :

- La racine carrée d'un nombre positif existe ;
- La racine carrée d'un nombre positif est un nombre ;

- Ce nombre est positif.

Un cas particulier a permis la construction de $\sqrt{13}$, ce cas particulier est directement suivi d'une définition qui se veut générale et qui nécessite une lecture implicite.

Tout se passe comme si un cas particulier était automatiquement généralisé sans que les trois points importants mentionnés ci-dessus ne soient spécifiquement soulignés.

D'autres points ne sont pas explicitement abordés :

- L'unicité de la racine carrée d'un nombre positif ;
- L'existence de la racine carrée de tout nombre positif.

L'unicité est effleurée par l'utilisation d'un vocabulaire particulier « la racine carrée », « le nombre positif » « la valeur exacte ».

Concernant le deuxième point, la formulation de la définition est vague « la racine carrée d'un nombre positif a » alors qu'un vocabulaire approprié est parfois utilisé : les points 2.3 et 2.4 du chapitre précisent « a désigne un nombre positif quelconque ».

Relevons un troisième et dernier point non explicitement abordé par le manuel : les opérations et propriétés algébriques que les élèves connaissent sur les "autres" nombres (rationnels).

En page 171 est introduit une propriété.

*Extrait*

« $a$ et $b$ sont deux nombres positifs ; pour démontrer que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ on écrit :

$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$

$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$ »

Une note est indiquée en marge :

« Se rappeler que $(xy)^2 = x^2y^2$ »

Les élèves connaissent cette propriété sur les nombres rationnels, nulle part le chapitre 10 n'indique qu'elle s'applique aux racines carrées. Le contexte nous conduit à lire la note comme une extension de certaines connaissances aux nouveaux nombres que constituent les racines carrées de nombres positifs, extension qui n'est pas précisée aux élèves. Ainsi, on entraîne les élèves à appliquer certaines de leurs anciennes connaissances sur les nouveaux objets qu'ils rencontrent sans leur dire c'est-à-dire à étendre une propriété à tous les nombres donc à précéder cette dernière d'un « pour tous les nombres ».

En conclusion, ce petit extrait de manuel montre les deux points suivants :

1- Les situations particulières et générales ne sont pas beaucoup distinguées. Il y a un passage presque automatique effectué entre le particulier et le général. D'une situation de géométrie où un segment permet d'introduire un nombre qui sera appelé « racine carrée de 13 », on passe à « la racine carrée en général » où il faut comprendre que tout nombre positif admet une racine carrée (qui est elle même un nombre) et où il faut accepter que cette racine carrée est positive. Nous remarquons une décontextualisation non indiquée de plus, les notions d'existence et d'unicité sont laissées dans le flou ;

2- D'anciennes connaissances des élèves sont étendues aux nouveaux objets rencontrés par l'unique moyen d'un rappel. Nous remarquons ici une omission et nous notons l'introduction d'une habitude consistant à mettre un « pour tout » ou un « quelconque » sans le dire et sans préciser que c'est possible.

Le chapitre 10 du manuel nous a donné des exemples de généralisations (décontextualisations) effectuées sans que l'attention des élèves ne soit particulièrement attirée : des informations sont omises. Nous allons constater sur un tout petit extrait du chapitre 12 du même manuel une situation semblable mais où le "manque d'information" porte sur le passage d'une situation générale à une situation spécifique. Il s'agit d'un exemple où il peut sembler que deux résultats consécutifs sont indépendants alors que le deuxième est une conséquence du premier.

La compatibilité de la relation "<" avec l'addition sur les nombres réels est exposée et illustrée d'un exemple.

Une propriété semblable est donnée pour la multiplication par un nombre positif, propriété elle aussi illustrée d'un exemple.

L'ensemble est encadré, titré et numéroté. La même présentation (encadrée, titré et numéroté) est utilisée pour une « règle de transposition ».

*Extrait*

| **1. Ordre et opérations** | |
|---|---|
| On peut ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité sans changer le sens de cette inégalité. | On peut multiplier (ou diviser) par un même nombre strictement positif chaque membre d'une inégalité sans changer le sens de cette inégalité. |
| **Exemples** | **Exemple** |
| De $a > b$ on déduit : $a + 2 > b + 2$ | De $2a > b$ on déduit : $a > \frac{a}{2}$ |

**2. Règle de transposition**

$a + b < c$ → on transpose b en changeant le signe de ce nombre → $a < c - b$

La règle de transposition semble plus générale que l'exemple correspondant à « ordre et opérations ». Plusieurs éléments contribuent à cette impression.

- L'absence de nombre chiffré dans la « règle » alors que dans le premier exemple l'ajout d'un nombre est chiffré (2).

- Dans l'exemple on "voit" le nombre ajouté aux deux membres de l'inéquation, dans la règle on ne "voit" pas directement le nombre ajouté, il faut interpréter l'écriture.

- Les termes utilisés pour la rédaction de l'exemple ne sont pas les mêmes que ceux utilisés pour la rédaction de la « règle de transposition » : les formulations sont différentes.

Une propriété générale est particularisée à l'aide d'un chiffre, une utilisation particulière de cette propriété est indiquée avec la même présentation que la propriété dont elle est issue et est généralisée (à l'aide de lettres). L'attention des élèves n'est pas attirée sur l'application particulière de la propriété 1 que représente la « règle 2 ». L'aspect particulier et pratique n'est pas souligné, ni le fait que cette « règle » est une déduction.

Ce petit extrait nous montre que les élèves sont conduits par le manuel à passer du général au particulier sans le dire ni le montrer alors qu'il disposent de connaissances suffisantes à la compréhension du cas particulier.

Le dernier chapitre du manuel auquel nous nous intéressons est le chapitre 3 « Translations, vecteurs, coordonnées ». Notre attention a été retenue par l'introduction du calcul des coordonnées d'un vecteur.

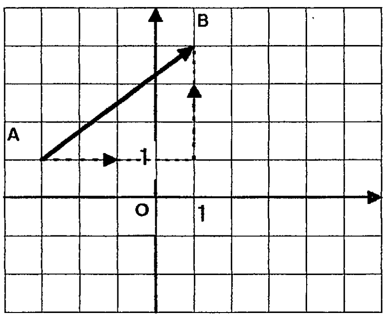
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné à l'aide des points A et B dont les coordonnées sont précisées, ce vecteur est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé. Un (double) « déplacement » (horizontal puis vertical) allant du point A vers le point B matérialise ce qui sera ensuite nommé les coordonnées du vecteur. Une remarque fait constater aux élèves que le « déplacement » correspond à un calcul effectué sur les coordonnées des points A et B, calcul dans lequel nous reconnaissons les coordonnées du vecteur. Les élèves sont appelés à construire deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OP}$ égaux au vecteurs $\overrightarrow{AB}$ puis à effectuer le (double) déplacement » précédant à partir du point C puis du point O. Il leur est demandé de vérifier que ce qu'ils découvriront ensuite comme étant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OP}$ calculées à l'aide des coordonnées des points C, D, O et P sont identiques à celles matérialisées par les déplacements.

*Extrait*

**Coordonnées d'un vecteur**

1 Un premier exemple

Dans le repère dessiné en rouge [voir ci-contre], le point A a pour abscisse $x_A = -3$, pour ordonnée $y_A = 2$, et le point B a pour abscisse $x_B = 1$, pour ordonnée $y_B = 5$.




Pour aller de A vers B déplaçons-nous d'abord horizontalement de 4 carreaux vers la droite, puis verticalement de 3 carreaux vers le haut.

On peut remarquer que :

$x_B - x_A = 1 - (-3) = 4$ et $y_B - y_A = 5 - 2 = 3$.

Complétons la figure précédente par des vecteurs *CD* et *OP* égaux au vecteur *AB*.

Faire le déplacement précédent en partant de C cette fois. **A quel** point aboutit-on ? **Vérifiez que** $x_P - x_O = 4$ et $y_P - y_O = 3$.

Un “autre ”vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté et les auteurs du manuel introduisent les coordonnées du vecteur à l'aide du (double) « déplacement » conduisant de A à B. Enfin, ils font constater que ces coordonnées s'obtiennent à l'aide des coordonnées des points A et B.

Deux autres situations semblables sont reproduites.

Finalement les auteurs indiquent le calcul des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des coordonnées $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$ des points A et B.

Cet extrait nous permet de constater les points suivants :

1- Les auteurs “montrent” aux élèves, sur des cas particuliers, que deux vecteurs égaux définissent les mêmes « déplacements » conduisant des origines aux extrémités des vecteurs ;

2- Les auteurs n'abordent pas la réciproque : deux « déplacements » identiques conduisant des origines aux extrémités de deux vecteurs définissent-ils des vecteurs égaux ?

3- Les auteurs généralisent le calcul des coordonnées d'un vecteur dont un représentant est donné. Ils n'explicitent pas l'indépendance des coordonnées en indiquant, par exemple, que l'égalité de deux vecteurs se traduit par des coordonnées identiques : ils ne généralisent pas ce qui a été vu dans un cas particulier.

Nous remarquons donc :

- Un passage automatique du particulier au général ;

- L'omission de la vérification de la réciproque d'une propriété ; une implicaiton peut ainsi être transformée en une équivalence.

En résumé, les chapitres 3, 10 et 12 nous ont montré :

1- Des généralisations effectuées sans informer les élèves ;

2- Des extensions de propriétés effectuées sans les préciser ;

3- Des propriétés utilisées de façon spécifique sans indications le précisant ;

4- Des habitudes introduites portant sur l'utilisation de quantificateurs et de connecteurs logiques.

Livre 2 : MATHS 3° Irem Strasbourg

Nous nous intéressons aux chapitre 1 et 3 intitulés « Equations et inéquations » et « Racines carrées ».

Le chapitre 1 débute avec l'énoncé d'une propriété générale traduite en deux phrases dont la rédaction peut vouloir dire qu'elles ne sont pas identiques.

*Extrait*

**1. Ordre et addition**

***Propriété (à admettre) :***

Si $a$ et $b$ désignent deux nombres tels que :

$$a < b$$

Alors pour tout nombre $c$ :

$$a + c < b + c$$

et $$a - c < b - c.$$

Dans une inégalité, l'ordre reste le même si on ajoute ou si on retranche un même nombre aux deux membres.

**2. Ordre et multiplication**

***Propriété (à admettre) :***

Si $a$ et $b$ désignent deux nombres tels que :

$$a < b,$$

Alors pour tout nombre $c$ **strictement positif :**

$$a \times c < b \times c$$

et $$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Dans une inégalité, l'ordre **reste le même** si on multiplie ou si on divise les deux membres par un même nombre **strictement positif.**

Le premier titre indique « ordre et addition » et est développé sous forme d'une implication où la conséquence est constituée de deux inégalités liées par « et ». Dans la rédaction de la propriété en "langage courant" cette préposition est remplacée par « ou ». Il n'y a donc pas d'équivalence entre la rédaction utilisant un symbolisme mathématique et la rédaction en langage courant.

L'utilisation de la préposition « et » signifie en général que les deux propositions liées ne sont pas identiques. Une différence apparaît effectivement dans la typographie avec les signes « + » et « - » mais les élèves disposent d'éléments de connaissances leur permettant de noter que les deux propositions sont équivalentes : la conclusion introduite par « alors pour tout nombre c » permet de choisir c = - c' de sorte que (a + c) fasse apparaître (a - c') c'est-à-dire une soustraction.
Par ailleurs, le titre 1 n'indique "que" « addition », la propriété semble laisser apparaître deux résultats, l'un d'eux lié à une addition et l'autre lié à une soustraction. Ainsi les élèves peuvent interpréter que ce qui est vrai pour l'addition l'est aussi pour la soustraction. Dans d'autres situations, cette interprétation peut conduire à des erreurs : par exemple la soustraction est commutative...
Un commentaire semblable peut-être développé pour le deuxième titre en remplaçant addition par multiplication, soustraction par division et en notant que $(\frac{a}{c'} = a \times c)$ avec $(c = \frac{1}{c'}, c \neq 0)$.
Finalement nous notons ici une situation générale exposée en deux cas particuliers sans que l'attention des élèves soit attirée sur l'aspect particulier de l'un des deux cas et alors qu'ils disposent d'éléments de connaissances pour comprendre cet aspect particulier (quelque soient les nombres $a$ et $c$ : $a - c = a + (-c); \frac{a}{c} = a \times \frac{1}{c} (a \neq 0)$). De plus nous notons l'introduction d'une utilisation erronée de connecteurs logiques (et/ou).

Le deuxième chapitre qui a attiré notre attention est le chapitre 3 « Racines carrées ». Pour ce manuel, comme pour le premier manuel, nous constatons que l'unicité de la racine carrée d'un nombre n'est pas indiquée ainsi que l'existence de la racine carrée de tout nombre positif.
La racine carrée d'un nombre positif est automatiquement classée dans la catégorie des nombres et il n'est pas indiqué que les opérations et propriétés algébriques connues sur les autres nombres sont valables pour ces nouveaux nombres. L'extension ou la généralisation des anciennes connaissances n'est pas précisée, les élèves sont alors entraînés à l'effectuer automatiquement.

En résumé, ce manuel nous montre que les aspects particuliers et généraux ne sont pas toujours soulignés. Comme nous le notions concernant le premier manuel, l'extension de la validité de certaines connaissances est parfois laissée dans l'ombre. Cela nécessite des élèves qu'ils étendent automatiquement leurs connaissances aux nouveaux objets ou aux nouvelles situations qu'ils rencontrent, c'est-à-dire, à utiliser (abusivement) l'expression "pour tout".

Livre 3 : Math 3° BELIN

Le chapitre 1 « Racines carrées » nous conduit à des remarques semblables à celles des deux autres manuels pour leur chapitre « Racines carrées ».
La définition de la racine carrée positive d'un nombre positif introduit la "nature" et l'existence de ce nouvel élément. L'unicité n'est pas explicitement abordée et l'existence de la racine carrée de tout nombre positif non plus.
De même que pour les deux autres manuels, l'extension des opérations et propriétés algébriques connues sur les autres nombres n'est pas indiquée alors que, comme pour le premier manuel, l'une d'elles est utilisée.

*Extrait*

RACINE CARRÉE D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT

**a. Sans calculatrice, compléter :**

$\sqrt{9\times4}=\sqrt{\ldots}=\ldots$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{4}=(\ldots)\times(\ldots)=\ldots$

Comparer les résultats obtenus.

**b. regrouper par paire les nombres égaux :**

| | |
|---|---|
| $\sqrt{9\times4}$ | $\sqrt{16\times4}$ |
| $\sqrt{16}\times\sqrt{4}$ | $\sqrt{9}\times\sqrt{4}$ |
| $\sqrt{16\times25}$ | $\sqrt{4\times100}$ |
| $\sqrt{4}\times\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}\times\sqrt{25}$ |
| $\sqrt{4}\times\sqrt{100}$ | $\sqrt{16\times4}$ |

**c. Recopier et compléter la démonstration suivante :**

« a et b étant deux nombres positifs, on veut démontrer que :

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

On sait que deux nombres positifs sont égaux lorsque leurs carrés sont égaux. Calculons :

$(\sqrt{a\times b})^2=\ldots$ car pour tout nombre $a$ positif : $(\sqrt{a})^2=a$.

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = \ldots \times \ldots$

Nous notons la dernière ligne où le résultat $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$ est utilisé sans que sa validité sur les racine carrée ait été mentionnée. Nous remarquons donc ici la généralisation d'une connaissance non indiquée. De la sorte, les élèves sont appelés à précéder d'un « pour tout » les propriétés qu'ils connaissent dans des cas particuliers.

Dans l'ensemble, pour les trois manuels, nous constatons :

- Des omissions ;
- Des passages du particulier au général effectués sans le dire ;
- Des passages du général au particulier effectués sans le dire ;
- Des situations où les élèves sont conduits à utiliser des quantificateurs sans précisions spécifiques ;
- Des situations où les élèves sont conduits à utiliser des connecteurs logiques sans rigueur.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7**
**Case 7018**
**2 Place Jussieu**
**75251 Paris cedex 05**

## RESUME

Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas
Nous étudions un aspect des pratiques des enseignants de mathématiques au collège en recherchant les traces que peuvent laisser leurs connaissances mathématiques en situation de classe.
Nous observons trois enseignantes débutantes : un objectif Sous-jacent est de comprendre comment s'initialisent les pratiques des enseignants.
La recherche s'articule autour de deux axes. Le premier est une double analyse -quantitative et qualitative- des discours que les professeurs tiennent en classe avec leurs élèves. Le deuxième est une comparaison du texte que constitue le discours avec le contenu du manuel utilisé en classe.
Nous analysons une séance par professeur, les observations se sont faites en classe de Troisième. Nous tenons compte des effets sur les activités des élèves de ce que les enseignantes abordent dans leurs discussions avec eux. De même, nous tenons compte de l'effet des propos des élèves sur le discours des enseignantes.
Les résultats obtenus semblent signifier qu'il y a un lien de dépendance entre l'adaptation des discours des enseignantes aux élèves et la disponibilité -en classe- de leurs connaissances mathématiques personnelles. Sur les cas étudiés, nous avons perçu trois attitudes : une enseignante donne l'impression de s'interdire d'utiliser ses connaissances mathématiques différentes de celles des élèves. Une enseignante donne l'impression de vouloir les partager avec les élèves. La troisième enseignante donne l'impression d'instaurer une frontière entre ses connaissances et celles des élèves : tout se passe comme si elle estimait que ses connaissances mathématiques personnelles ne pouvaient pas leur être utiles. Du point de vue de l'adaptation aux élèves, l'enseignante qui est dans le "partage" avec eux est celle qui réussit le mieux.
La gestion des échanges avec la classe ne présente pas de similitude entre les trois enseignantes. Au contraire il s'en dégage une si on s'intéresse aux aspects des discours directement liés aux contenus mathématiques.
La comparaison au manuel semble signifier que le mode d'appropriation de cet outil à l'extérieur de la classe se répercute en classe - peut-être y a t il une régularité entre son utilisation (par les enseignantes) au moment des préparations et la restitution de ces dernières en classe.

## MOTS CLES

Pratiques en classe, utilisation des manuels, discours

**Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot**
**Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE**
**2 Place Jussieu. Case 7018**
**75251 PARIS Cedex 05**
**iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr**
**www.irem-paris7.fr.st**
**Dépôt légal : 2001**
**ISBN : 2-86612-221-6**